

Relative effektive Cartierdivisoren

Definition 0.1. Es sei X/T ein beliebiges Schema und $D \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist D ein effektiver Cartierdivisor, wenn gilt

1. D/T ist flach.
2. $I(D) \subseteq \mathcal{O}_X$ ist eine invertierbare Idealgarbe also lokal ein freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1.

Proposition 0.1. Es seien $D_1, D_2 \subseteq X$ zwei effektive Cartierdivisoren. Dann ist auch $D_1 + D_2 \subseteq X$ wohldefiniert und ein effektiver Cartierdivisor.

Es sei nun T ein lokal noethersches Schema und X/T vom endlichen Typ und flach über T .

Proposition 0.2. Es sei X/T wie oben und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul, flach über T . Dann ist äquivalent

- a) $\mathcal{F}$ ist flacher $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- b) Für jedes $\bar{t} \rightarrow T$, geometrischer Punkt, ist $\mathcal{F}_{\bar{t}}$ ein flacher $\mathcal{O}_{X_{\bar{t}}}$ -Modul.

Proposition 0.3. Es sei X/T wie oben und $D \subseteq X$, abgeschlossenes Unterschema, flach über T .

Dann ist D genau dann ein effektiver Cartier-Divisor in X über T , wenn jedes $D_{\bar{t}} \subseteq X_{\bar{t}}$ ein effektiver Cartier-Divisor in $X_{\bar{t}}$ für alle geometrischen Punkte $\bar{t} \rightarrow T$ ist.

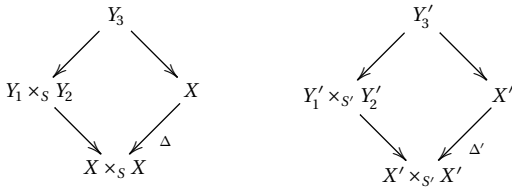
Weiter seien nun $H_1, H_2 \subseteq X$, abgeschlossene Unterschemata, flach über T und $(H_i)_{\bar{t}} \subseteq X_{\bar{t}}$ effektive Divisoren in $X_{\bar{t}}$.

Proposition 0.4. Ist $(H_1)_{\bar{t}} - (H_2)_{\bar{t}}$ für jedes $t \in T$ ein effektiver Divisor in X_t , so existiert ein abgeschlossenes Unterschema $K \subseteq X$ mit K/T flach und $K_t = (H_1)_{\bar{t}} - (H_2)_{\bar{t}}$.

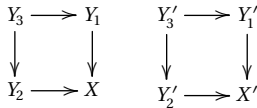
Beweis. Folgt aus obigen Aussagen.

Basiswechsel von Unterschemaschnitten Es sei X/S ein S -Schema und $Y_1, Y_2 \subseteq X$ zwei abgeschlossene S -Unterschemata. Weiter sei $Y_3 = Y_1 \cap Y_2$ der schematheoretische Schnitt. Ist dann $S' \rightarrow S$ ein Morphismus und $W' = W \times_S S'$ für ein S -Schema W , so ist $Y'_3 = Y'_1 \cap Y'_2$.

Inbesondere ist für $k(s) \rightarrow S$ auch $(Y_3)_s = (Y_1)_s \cap (Y_2)_s$. Man hat ja



wobei rechts die Anwendung von $\times_S S'$ auf das linke Diagramm steht. Wir können auch die kartesischen Diagramme



heranziehen.

Konstruktion von Schemata

Tangenten als Grenzlagen der Sekanten Es sei $C \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine glatte Kurve in einem projektiven Raum. Betrachte die beiden Inzidenzvarietäten in $X = C \times C \times \mathbb{P}_k^n$:

$$S = \{(p, q, x) \mid p, q \in C, p \neq q, x \in \overline{pq}\} \subseteq X,$$

die Sekanten und

$$T = \{(p, p, x) \mid p \in C, \text{ und } x \in T_p C\} \subseteq X,$$

die Tangenten.

Dann sind T und $S \cup T$ abgeschlossen in X .

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & S \cup T & \longleftarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B - \Delta & \longrightarrow & B & \longleftarrow & \Delta \end{array}$$

mit $B = C \times C$ und $\Delta \hookrightarrow B$, der Diagonale.

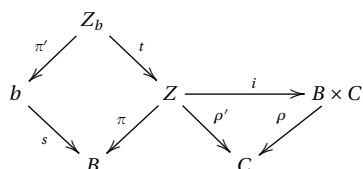
Die Menge $S \cup T \subseteq X$ ist in Wirklichkeit sogar eine projektive Varietät $Y \subseteq X$ über B , deren Faser $Y_{(p,q)}$ gleich der Menge der (p, q, x) mit $x \in \overline{pq}$ und deren Faser $Y_{(p,p)}$ gleich der Menge der (p, p, x) mit $x \in T_p C$ ist.

Man konstruiert Y folgendermaßen: Man betrachtet die Varietät $W = B \times C$ und darin die Untervarietäten $\Gamma_1 = \{(p, q, p)\}$ und $\Gamma_2 = \{(p, q, q)\}$ die von den Idealgarben $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{O}_W$ erzeugt werden.

Man nehme dann $Z = V(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) \subseteq W$, abgeschlossenes Unterschema.

Die Abbildung $\pi: Z \rightarrow B$ ist quasiendlich und eigentlich, also endlich und weil $\dim_k(\pi_* \mathcal{O}_Z)_b = 2$ für alle $b \in B$, sogar auch flach.

Wir haben das Diagramm



Dabei ist für $b = (p, q)$ die Faser $Z_b = (p, q, p) \sqcup (p, q, q)$ und für $b = (p, p)$ ist $Z_b = (p, p, 2p)$, wobei $2p$ für $V(\mathfrak{m}_p^2) \subseteq C$ steht.

Ist $\mathcal{L}$ die ample Einbettungsgarbe von $C \subseteq \mathbb{P}^n$, so ist $\mathcal{E} = \pi_*((\rho^* \mathcal{L})|_Z)$ ein Vektorbündel vom Rang 2 auf B .

Man hat nun eine Abbildung von Vektorbündeln über B mit $V = H^0(C, \mathcal{L})$:

$$V \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_B \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}$$

Faserweise kann man diese Abbildung durch $s^*(\phi)$ definieren als

$$s^*(V \otimes \mathcal{O}_B) = V \xrightarrow{\gamma} s^*(\mathcal{E}) = \pi'_* t^* \rho^* \mathcal{L} = \mathcal{L}|_{A_b}$$

wobei $s^*(\phi) = \psi_b = \gamma$ durch die Einschränkung der Schnitte $h \in V$ auf die abgeschlossene Teilmenge $A_b \subseteq C$ gegeben wird, die durch $A_{(p,q)} = p \sqcup q$ bzw. $A_{(p,p)} = 2p$ gegeben ist.

Dabei entsprechen den $h \in V$ die Hyperebenen in $\mathbb{P}_k^n$ und die $h \in V$, die unter ψ_b auf Null abgebildet werden, sind genau diejenigen, die p und q enthalten (für $p \neq q$) bzw. die die Tangentenlinie $T_p C$ enthalten (für $p = q$).

Die Abbildung ϕ ist eine Surjektion, der eine abgeschlossene Immersion

$$Y = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{j} \mathbb{P}_B^n = X$$

von B -Schemata entspricht. Das Bild der Faser $Y_{(p,q)}$ projiziert auf $\mathbb{P}_k^n$ ist für $p \neq q$ gleich der Geraden durch p und q in $\mathbb{P}_k^n$. Für $p = q$ ist es die Tangentengerade $T_p C$ durch p an C in $\mathbb{P}_k^n$.

Damit ist Y als unser gesuchtes projektives Unterschema von X nachgewiesen.

Das $[m]$ -Hilbertschema einer projektiven Varietät Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eingebettet mit der amplen Garbe $\mathcal{L}$ auf X und $\dim X = r$.

Weiter sei $H = \text{Hilb}^{(m)}(X)$ das Hilbertschema der $Z \subseteq X$, abgeschlossenes Unterschema mit $\text{len } Z = m$. Dann gibt es ein Diagramm

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & H \times X & \xrightarrow{p_2} & X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_k^n \\ & \searrow q & \swarrow p_1 & & & & \\ & & H & & & & \end{array}$$

Dabei ist $W \subseteq H \times X$ die universelle Familie über H der $(Z \subseteq X)$ und q die zugehörige flache, endliche Abbildung vom Grad m .

Die Garbe $\mathcal{M} = (p_2^* \mathcal{L})|_W$ ist ein Linienbündel auf W und deshalb

$$\mathcal{E} = q_* \mathcal{M} = q_*(p_2^* \mathcal{L}|_W)$$

ein Vektorbündel von m -dimensionalen Vektorräumen.

Die Abbildung

$$\phi: V \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{E}$$

für $V = H^0(X, \mathcal{L})$ induziert eine Abbildung von Bündeln

$$\begin{array}{ccc} Y = \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(V)_H \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & H \end{array}$$

über H . Dabei ist für $[Z] \in H$

$$j(Y_{[Z]}) = \bigcup_{\substack{K \subseteq \mathbb{P}(V) \\ K \supseteq Z \\ \text{Hyperebene}}} K$$

Diese Abbildung ϕ wird über $h = [Z] \in H$ folgendermaßen konstruiert:

Man benutzt dazu die Erweiterung des obigen Diagramms

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{b} & W & \longrightarrow & H \times X & \xrightarrow{p_2} & X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_k^n \\ \downarrow c & & \downarrow q & & \swarrow p_1 & & & & \\ [Z] & \xrightarrow{a} & H & & & & & & \end{array}$$

um ϕ über $[Z]$ als

$$\phi_{[Z]} = a^*(\phi): a^*(V \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_H) = V \rightarrow a^*(\mathcal{E}) = a^* q_* \mathcal{M} = c_* b^* \mathcal{M} = H^0(Z, \mathcal{L}|_Z)$$

festzulegen.

Hilbertschemas

$\text{Hom}_S(X, Y)$ als offener Unterfunktork Es seien X, Y zwei projektive S -Schemata mit X/S flach und $H = \text{Hilb}_S(X \times_S Y)$. Dann gibt es eine Abbildung

$$\text{Hom}_S(X, Y) \rightarrow \text{Hilb}_S(X \times_S Y)$$

Wendet man $(-)(T)$ auf diese Abbildung an, so entsteht definitorisch

$$\text{Hom}_T(X_T, Y_T) \mapsto \left\{ i: W \hookrightarrow X_T \times_T Y_T \mid \begin{array}{l} i \text{ abgeschlossene Immersion über } T, \\ W/T \text{ flach} \end{array} \right\}.$$

Dabei wird einem $f: X_T \rightarrow Y_T$ über T der Graph $\Gamma_f \subseteq X_T \times_T Y_T$ zugeordnet. Da $p_1: \Gamma_f \cong X_T$, ist Γ_f mit X_T flach über T .

Wir betrachten das Diagramm

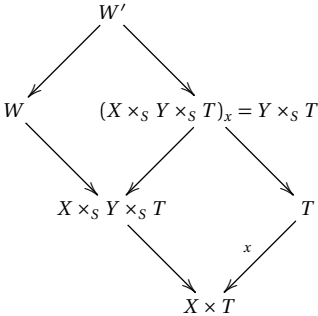
$$\begin{array}{ccccc} W \times_H H & \hookrightarrow & W & \xrightarrow{\quad} & X \times_S Y \times_S H \\ & \searrow q' & \searrow q & & \downarrow \\ X \times_S H' & \xrightarrow{\quad} & X \times_S H & \xrightarrow{a} & H \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & H' & \hookrightarrow & H & \xrightarrow{=} & H \end{array}$$

Dabei ist $H' \subseteq H = \text{Hilb}_S(X \times_S Y)$ das offene Unterschema, das die Eigenschaft „ q ist flach“ darstellt, es ist also auch q' flach und H' universell für diese Eigenschaft. Dies gilt, weil q und a , also auch $a \circ q$ eigentlich sind.

Es gibt nun eine Abbildung

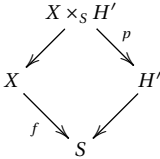
$$h : X \times_S H' \rightarrow \mathrm{Hilb}_S(Y),$$

die einem Punkt (x, W) mit $W \hookrightarrow X \times_S Y$ flach über S den Punkt $W' = (W)_x \hookrightarrow Y = (X \times_S Y)_x$ aus $\mathrm{Hilb}_S(Y)$ zuordnet. Dabei gilt das Diagramm



Man beachte, daß $W \rightarrow X \times T$ und damit auch $W' \rightarrow T$ flach ist, da wir W aus H' gezogen hatten.

Das Unterschema $U \subseteq \mathrm{Hilb}_S(Y)$, das einpunktige Unterschemata ohne Multiplizität parametrisiert, ist offen. Es ist also auch $V = h^{-1}(U) \subseteq X \times_S H'$ offen. Wegen



ist p eigentlich und damit $H' - p(X \times_S H' - V) = H'' \subseteq H'$ offen.

Die Menge H'' ist nun gerade die Menge der $W \hookrightarrow X \times_S Y$ mit $p_1 : W \cong X$, also der Graphen Γ_f in $\mathrm{Hilb}_S(X \times_S Y)$.