

KOMMUTATIVE ALGEBRA

Morphismen

Das folgende Lemma zeigt, daß „lokal vom endlichen Typ“ lokal auf der Basis ist:

Lemma 0.1. *Es sei B eine A -Algebra und für eine endliche Überdeckung $D(f_i) \subseteq \text{Spec}(B)$ immer $B_{f_i} = A[b_{ij}/1]$ eine endlich erzeugte A -Algebra. Dann ist auch B eine endlich erzeugte A -Algebra.*

Beweis. Es sei $\sum b_{ij} f_i = 1$. Dann ist $B = A[b_{ij}, b_i, f_i]$.

Flachheit

Generic-Freeness Sehr wichtig ist das folgende „Generic-Freeness-Lemma“

Theorem 0.1. *Es sei A ein integrierender noetherscher Ring, $B = A[x_1, \dots, x_n]$ eine endlich erzeugte A -Algebra und M ein endlich erzeugter B -Modul. Dann existiert ein $a \in A$, so dass M_a ein freier A_a -Modul ist.*

Beweis. Es sei $(0) \subseteq \dots M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \dots M_r = M$ die übliche Kompositionsreihe mit

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow M_{i+1} \rightarrow B/P_i \rightarrow 0.$$

Können wir den Satz also für alle $M = B/P$ zeigen, P prim in B , so folgt induktiv, dass er auch für das ursprüngliche $M = M_r$ gilt. Es ist ja in einer exakten Sequenz $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ von A -Moduln mit $N'_{a'}$ frei über $A_{a'}$ und $N''_{a''}$ frei über $A_{a''}$, auch $N_{a'a''}$ frei über $A_{a'a''}$.

Sei also $M = B/P$ und $Q = A \cap P$. Ist $Q \neq (0)$, so gibt es $a \in Q$ mit $a \neq 0$. Es ist dann $M_a = 0$ und trivialerweise A_a -frei.

Man kann also im Folgenden $Q = (0)$ annehmen, also

$$A \hookrightarrow B/P = A[x_1, \dots, x_n] = C.$$

Wir nehmen im Folgenden induktiv an, dass der Satz für alle B , die über ein beliebiges A von weniger als n Elementen als Algebra erzeugt sind, bereits bewiesen ist.

Nun kann der Ring C von oben von über A algebraisch unabhängigen $x_1, \dots, x_n$ erzeugt sein. In diesem Fall ist er trivialerweise A -frei.

Andernfalls gibt es eine Relation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ mit $f \in A[X_1, \dots, X_n]$, in der ohne Einschränkung der Allgemeinheit X_n wirklich vorkomme. Durch eine Substitution der Variablen $x_n = y_n, x_i = y_i + y_n^{D_i}$ für $i < n$ wie im noetherschen Normalisierungssatz bringt man f auf die Form

$$a_0 y_n^N + a_1 y_n^{N-1} + \dots + a_N = 0.$$

Dabei ist $a_0 \in A$ und $a_1, \dots, a_N \in A[y_1, \dots, y_{n-1}]$, und es ist

$$A[y_1, \dots, y_n] = A[x_1, \dots, x_n].$$

Der Ring $A[y_1, \dots, y_n]_{a_0}$ ist also ein endlich erzeugter Modul über der A_{a_0} -Algebra $A[y_1, \dots, y_{n-1}]_{a_0}$. Damit gibt es nach Induktion ein $a \in A$, so dass $A[y_1, \dots, y_n]_{a_0 a}$ ein freier $A_{a_0 a}$ -Modul ist. $\square$

Exakte Komplexe Wir kommen jetzt zur Frage der Exaktheit von Komplexen und der „Offenheit des Ortes, an dem Komplexe exakt sind“.

Theorem 0.2. *Es sei S ein noetherscher Ring und*

$$(1) \quad \mathcal{F} : 0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

ein Komplex von freien S -Moduln.

Dann ist äquivalent

- a) $F_\bullet$ ist exakt, also $H_i F_\bullet = 0$ für alle $i > 0$
b) Es ist

$$(2) \quad \text{rang } F_k = \text{rang } \phi_{k+1} + \text{rang } \phi_k$$

und

$$(3) \quad \text{depth}(I(\phi_k), S) \geq k$$

für alle $k = 1, \dots, n$.

Dabei ist $\text{depth}(I(\phi_k), S)$ die längste für S reguläre Folge aus Elementen von $I(\phi_k)$ und $I(\phi_k) = I_r(\phi_k)$ mit $r = \text{rang } \phi_k$. Ist $I(\phi_k) = (1)$ so setzen wir $\text{depth}((1), S) = \infty$.

Beweis. Wir beweisen nur die Richtung b) nach a): Durch Lokalisierung an Primidealen können wir S als lokal annehmen und wir führen eine Induktion über $\dim S$ durch. Ist zunächst $d = \text{depth } S$, so ist $I(\phi_k) = (1)$ für $k > d$ und wir betrachten einmal die Stellen F_n bis F_{d+1} . Dort sind die Bedingungen von Lemma 0.4 erfüllt und es liegt bei F_n bis F_{d+1} Exaktheit vor. Den freien Modul F_d ersetzen wir durch den ebenfalls freien Modul $\text{coker } \phi_{d+1}$, er ist projektiv und frei wegen Lemma 0.3 und $I(\phi_{d+1}) = (1)$.

Damit haben wir einen Komplex $\mathcal{F} : 0 \rightarrow F_d \rightarrow \dots \rightarrow F_0$ mit $d = \text{depth } S$. Lokalisieren an jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ mit $\text{ht } \mathfrak{p} < \dim S$ ergibt durch Induktion nach der Dimension von S Exaktheit von $\mathcal{F} \otimes_S S_{\mathfrak{p}}$. (Die Bedingungen in b) bleiben erhalten nach Lemma 0.2). Also besteht der Support von $H_i(\mathcal{F})$ nur aus maximalen Idealen von S und man hat deshalb $\text{depth } H_i(\mathcal{F}) = 0$. Ist $H_i(\mathcal{F}) \neq 0$ so steht dies im Widerspruch zum Azyklizitätslemma, denn $\text{depth } F_i = \text{depth } S = d \geq i$. $\square$

Lemma 0.2. *Es sei S ein noetherscher Ring und $\phi : F \rightarrow G$ eine Abbildung freier S -Moduln. Weiter enthalte $I(\phi)$ einen Nichtnullteiler. Ist dann $T \subseteq S$ ein multiplikatives System so ist*

$$I(\phi) \otimes_S T^{-1} S = I(\phi \otimes_S T^{-1} S)$$

Lemma 0.3. *Es sei $F \xrightarrow{\phi} G \rightarrow M \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von S -Moduln mit F und G frei und S ein lokaler Ring. Dann ist M genau dann projektiv, wenn $I(\phi) = I_r(\phi) = (1)$ mit $r = \text{rang } \phi$ ist.*

Lemma 0.4. *Ein Komplex*

$$F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H$$

von freien S -Moduln mit $I(\phi) = I(\psi) = (1)$ ist genau dann exakt, wenn

$$\text{rang } G = \text{rang } \phi + \text{rang } \psi$$

Lemma 0.5 (Azyklizitätslemma). *Es sei*

$$0 \rightarrow W_n \xrightarrow{\phi_n} \dots \xrightarrow{\phi_2} W_1 \xrightarrow{\phi_1} W_0$$

ein Komplex von endlich erzeugten, nicht notwendig freien S -Moduln W_i über einem lokalen Ring S mit $\text{depth } W_i \geq i$. Wenn $H_i W_\bullet \neq 0$ für wenigstens ein $i > 0$ ist, so ist $\text{depth } H_i W_\bullet \geq 1$ für das größte solche i .

Proposition 0.1. *Es sei $f_1, \dots, f_s \in S$ eine Folge von Elementen eines lokalen Rings S . Dann ist $f_1, \dots, f_s$ eine reguläre Folge für S , also*

$$0 \rightarrow S/(f_1, \dots, f_{k-1}) \xrightarrow{f_k} S/(f_1, \dots, f_{k-1})$$

injektiv, wenn der Koszul-Komplex

$$\mathcal{K} : 0 \rightarrow K_s \xrightarrow{\psi_s} K_{s-1} \xrightarrow{\psi_{s-1}} \dots \xrightarrow{\psi_2} K_1 \xrightarrow{\psi_1} K_0$$

exakt ist. Dabei ist $K_1 = S^s$ und $K_i = \bigwedge^i K_1$ und die ψ_k sind die üblichen Abbildungen $e_{i_1, \dots, i_k} \mapsto \sum_{v=1}^k (-1)^v f_{i_v} e_{i_1, \dots, \widehat{i_v}, \dots, i_k}$.

Wir widmen uns nun, im Besitz von Theorem 0.2 und Proposition 0.1 folgender Frage:

Es sei $S = C = A[X_1, \dots, X_N]$ ein Polynomring über dem noetherschen Ring A . Weiter sei für jedes $x \in \text{Spec}(C)$ der Ring $R_x = C_x \otimes_A k_C(x)$.

Ist nun $\mathcal{F} : 0 \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0$ ein Komplex wie in Theorem 0.2 was können wir über die Menge

$$E(\mathcal{F}) = \{x \in \text{Spec}(C) \mid \mathcal{F} \otimes_C R_x \text{ ist exakt}\}$$

sagen? Wir wollen zeigen: Sie ist offen.

Dazu ziehen wir die Bedingungen b) des obigen Theorems heran und wollen sie als „offene Bedingungen“ erkennen. Dies ist für

$$R(\phi_k, a) = \{x \in \text{Spec}(C) \mid \text{rang } \phi_k \geq a\}$$

offensichtlich, da es sich um das Nichtverschwinden einer Determinante handelt. Damit ist von den Bedingungen in b) der Erfüllungsort von (2) als offen erkannt. Schwieriger ist zu zeigen, daß der Erfüllungsort von (3) auch offen ist.

Die Bedingung $\text{depth}(I, C) \geq s$ setzt sich nach Proposition 0.1 in die Exaktheit eines Koszul-Komplexes für $f_1, \dots, f_s$ um. In dieser Exaktheit treten wieder nach obigem Theorem die Bedingungen (2) und (3) auf. Die ersteren sind unproblematisch, wir haben sie oben als generell offen erkannt. Die zweiten können durch Induktion nach der Zahl s als offen erkannt werden, bis auf die letzte $\text{depth } I(\psi_s) \geq s$ mit $I(\psi_s) = (f_1, \dots, f_s)$. Hier greifen wir zu einem Trick und erkennen, daß für den Zweck des Exaktheitsbeweises wie wir ihn oben gegeben haben auch die Bedingung $\text{ht } I(\psi_s) \geq s$ genügt (äquivalent weil R_x Cohen-Macaulaysch). Dies ist aber eine offene Bedingung nach den üblichen Sätzen über die Dimension von Fasern in einer algebraischen Familie. Es ist also

$$H(I(\psi_s), a) = \{x \in C \mid \text{ht } I(\psi_s \otimes_C R_x) \geq a\}$$

eine offene Menge in $\text{Spec}(C)$. Damit ist auch der Erfüllungsort aller $\text{depth } I(\phi_k) \geq k$ in Abschnitt b) des Theorems als offen nachgewiesen und damit auch $E(\mathcal{F})$ von oben als offen.

Offenheit des flachen Orts

Proposition 0.2. *Es sei A ein noetherscher Ring und $B = A[x_1, \dots, x_n]$ eine endlich erzeugte A -Algebra. Weiter sei M ein endlich erzeugter B -Modul. Dann ist*

$$F(M) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \mid M_{\mathfrak{q}} \text{ ist flacher } A_{\mathfrak{p}}\text{-Modul mit } \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A\}$$

eine offene Teilmenge von $\text{Spec}(B)$.

Beweis Wir betrachten die Polynomalgebra $C = A[X_1, \dots, X_n]$ mit $B = C/I$. Dann ist M ein endlich erzeugter C -Modul, hat also eine freie Auflösung mit endlich erzeugten freien C -Moduln

$$\dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Da die F_i auch freie A -Moduln sind und C_x/C flach ist, ist auch C_x ein flacher A -Modul. Damit ist

$$(*) \quad \text{Tor}_i^A(M_x, k_A(y)) = h_x^i(C_x \otimes_C F_\bullet \otimes_A k_A(y))$$

für alle $x = \mathfrak{q}_x \in \text{Spec}(C)$ und $y = \mathfrak{q}_y \cap A = \mathfrak{p}_y \in \text{Spec}(A)$.

Nach dem lokalen Flachheitskriterium ist M_x/A_y flach, wenn $h_x^1 = 0$ bzw. $h_x^i = 0$ für alle $i > 0$. Wir müssen also zeigen, daß die Menge der $x \in \text{Spec}(C)$ für die $h_x^1 = 0$ ist offen in $\text{Spec}(C)$ ist.

Um die doppelte Abhängigkeit von x und y in (*) loszuwerden, benutzen wir

$$\text{Tor}_i^A(M_x, k_A(y)) = 0 \iff 0 = \text{Tor}_i^A(M_x, k_A(y)) \otimes_{k_A(y)} k_C(x) = \text{Tor}_i^A(M_x, k_C(x)) = 0$$

wobei die zweite Gleichheit rechts aus $(M_x \otimes_A^L k_A(y)) \otimes_{k_A(y)}^L k_C(x) = M_x \otimes_A^L k_C(x)$ folgt.

Wir haben also bei Annahme, daß die $\text{Tor}_i^A(M_x, k_C(x))$ für ein festes x verschwinden, die Exaktheit des $C \otimes_A k_C(x)$ -linearen Komplexes

$$(4) \quad F_\bullet \otimes_C C_x \otimes_A k_C(x)$$

von endlich erzeugten $C_x \otimes_A k_C(x)$ -Moduln und wir müssen zeigen, daß dieser bei „kleiner Veränderung von x “ exakt bleibt.

Zunächst einmal beachten wir, daß für

$$R = C \otimes_A k_C(x) = k_C(x)[X_1, \dots, X_n]$$

immer gldh $R_x = n$ ist. So zerlegen wir jetzt $F_\bullet$ in

$$0 \rightarrow W_i \rightarrow F_i \rightarrow W_{i-1} \rightarrow 0$$

und bilden mit $-\otimes_C C_x \otimes_A k_C(x)$ daraus die Sequenzen

$$(5) \quad 0 \rightarrow \tilde{W}_i \rightarrow \tilde{F}_i \rightarrow \tilde{W}_{i-1} \rightarrow 0$$

Die Exaktheit des Komplexes (4) zieht dann also die Exaktheit aller dieser Sequenzen (5) nach sich. Da aber gldh $R_x = n$ ist und $\text{pd } \tilde{W}_i = \text{pd } \tilde{W}_{i-1} - 1$, ist $\text{pd } \tilde{W}_j = 0$ für $j \geq n - 1$.

Die Exaktheit von (4) führt also zur Exaktheit des trunkierten Komplexes

$$(6) \quad (0 \rightarrow W_s \rightarrow F_s \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M) \otimes_C R_x$$

in dem $W_s \otimes_C R_x$ ein freier R_x -Modul ist für jedes $s \geq n - 1$.