Janetbasen und Algorithmen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung mittels Symmetrieanalyse

Jürgen Böhm

29. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Grundbegriffe **3**
1.1 Problemstellung der Arbeit . . . 3
1.2 Differentialgleichungen . . . 3
1.2.1 Allgemeines . . . 3
1.2.2 Koordinatentransformationen . . . 3
1.3 Systeme linearer partieller Differentialgleichungen (lpdgl) . . . 4
1.3.1 Koeffizientenringe von lpdgl . . . 5
1.3.2 Transformation von lpdgl . . . 6
1.4 Normalformen von Systemen von lpdgl . . . 7
1.4.1 Termordnungen . . . 7
1.4.2 Reduktionstheorie . . . 10
1.4.3 Janet–Basen . . . 25
1.5 Lösungen von Systemen von lpdgl . . . 29
1.5.1 Allgemeines . . . 29
1.5.2 Der Existenzsatz von Riquier . . . 30
1.5.3 Anwendungen des Existenzsatzes von Riquier . . . 35
1.5.4 Koordinatentransformationen von lpdgl und ihrer Lösungen . . . 41
1.6 Anwendungen der Janetbasen von lpdgl . . . 42
1.6.1 Eliminationstheorie . . . 42
1.6.2 Multilineare Kombinationen . . . 46
1.7 Transformationsgruppen . . . 50
1.7.1 Allgemeines . . . 50
1.7.2 Formale Transformationsgruppen . . . 51
1.7.3 Implizite Darstellung . . . 52
1.7.4 Transformationsgruppen der Ebene . . . 53
1.8 Symmetrien von Differentialgleichungen . . . 53
1.8.1 Prolongationen . . . 53
1.8.2 Differentialinvarianten . . . 53
1.8.3 Bestimmende Systeme . . . 53

2 Bestimmung des Typs der Symmetriegruppe **55**
2.1 Problemstellung . . . 55
2.2 Mögliche Typen von Transformationsgruppen . . . 55
2.3 Bestimmung des Typs mittels Eigenschaften der Janet–Basis . . . 55
2.4 Unterscheidung nach Dimension . . . 55
2.5 Unterscheidung nach Typ der Janet–Basis . . . 55
2.6 Unterscheidung mittels der Lie'schen Invarianten λ und ν . . . 55
2.7 Unterscheidung durch das charakteristische Polynom der Liealgebra 55
2.8 Zusammenfassung . . . 55

3 Auffindung der kanonischen Koordinaten **56**
3.1 Das nichtlineare DGL–System für σ und ρ 56
3.2 Symmetrien des DGL–Systems für σ und ρ 56
3.3 Berechnung einer Normalform der DGL–Systeme für σ und ρ 56
3.4 Integration der Gleichungen für σ und ρ über einfache Systeme von Hilfsgleichungen 56
3.5 Zusammenstellung der Ergebnisse 56

4 Lösung der Gleichung **57**
4.1 Transformation der Gleichung in kanonische Koordinaten 57
4.2 Lösungsmethoden für Gleichungen in kanonischen Koordinaten . . . 57
4.2.1 4 oder mehr Symmetrien 57
4.2.2 Die Symmetriegruppe ist auflösbar 57
4.2.3 Nicht auflösbare Symmetriegruppe 57
4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse 57

Kapitel 1

Einführung und Grundbegriffe

1.1 Problemstellung der Arbeit

1.2 Differentialgleichungen

1.2.1 Allgemeines

Es seien $u^1, \ldots, u^m$ Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x^1, \ldots, x^n$. Für eine beliebige Funktion u von $x^1, \ldots, x^n$ sei $D_J u = u_J = \frac{\partial^j}{\partial (x^1)^{j_1} \cdots \partial (x^n)^{j_n}} u$ für $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $j = j_1 + \cdots + j_n$, $j_\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 1.2.1 *Eine* Differentialgleichung *ist eine Gleichung* $\Omega(x^1, \ldots, x^n, u^{i_\nu}_{J_\nu}) = 0$*, wobei* Ω *eine in einem Punkt* $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{u}^{i_\nu}_{J_\nu}) \in \mathbb{C}^N$ *analytische Funktion ist. Ein* System von Differentialgleichungen *ist eine endliche Menge von Differentialgleichungen* $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_s = 0$*, die in demselben Punkt* $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{u}^i_J$ *analytisch sind.*

Wir definieren also Differentialgleichungen grundsätzlich im Komplexen und auch nur lokal um einen Punkt des $\mathbb{C}^N$. Dementsprechend müssen dann auch Lösungen definiert werden:

Definition 1.2.2 *Als* Lösung *eines Systems von Differentialgleichungen* $\Omega_\nu(x^j, u^i_J) = 0$ *um den Punkt* $\bar{x}^j, \bar{u}^i_J$ *bezeichnen wir ein System von Funktionen* $\tilde{u}(x^1, \ldots, x^n)$*, die in* $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ *analytisch sind, für die* $\tilde{u}^i_J(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) = \bar{u}^i_J$ *ist und für die* $\Omega_\nu(x^j, \tilde{u}^i_J(x^1, \ldots, x^n)) = 0$ *in einer Umgebung von* $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ *ist.*

1.2.2 Koordinatentransformationen

Alle in diesem Abschnitt eingeführten Abbildungen und Differentialgleichungen seien, wie oben, in einem festen Punkt analytisch und als Abbildungen in der Umgebung dieses Punktes zu betrachten. Wir verzichten jedoch hier darauf, diese Punkte mit zu bennennen, um die Darstellung abzukürzen. Sei $x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m$ ein System von unabhängigen und abhängigen Veränderlichen, $y^1, \ldots, y^n, w^1, \ldots, w^p$ ein zweites. Beide seien durch die Abbildungen $x^i = \phi^i(w^l_K, y^1, \ldots, y^n)$ und $u^j = g^j(w^l_K, y^1, \ldots, y^n)$ verbunden. Wir setzen

$$D_{y^\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{y^\nu} + \sum_{w^k_J} w^k_{J_\nu} \frac{\partial}{\partial w^k_J} \tag{1.1}$$

Dabei stehe J_ν für $(j_1, \ldots, j_\nu + 1, \ldots, j_n)$ und die (formal gebildete) Summe aus unendlich vielen Gliedern erstrecke sich über alle möglichen w^k_J. Der Ausdruck $D_{y^j} h(y^1, \ldots, y^n, w^{k_\nu}_{J_\nu})$ ist für jede Funktion h mit endlich vielen Argumenten dann endlich definiert.

Wir richten nun an $\phi^i(w^l_K, y^1, \ldots, y^n)$ noch die Anforderung, daß

$$\det(D_{y_j}\phi^i)_{ij} \neq 0 \tag{1.2}$$

die Matrix $(D_{y_j}\phi^i)_{ij}$ also invertierbar ist. Dies bedeutet, daß $x^i = \phi^i(w^l_K, y^j)$ für alle analytischen $w^l(y^j)$, für die die Determinante in (1.2) nicht verschwindet, einen lokal analytischen Diffeomorphismus zwischen $x^1, \ldots, x^n$ und $y^1, \ldots, y^n$ vermittelt.

Wir suchen nun für eine beliebige Differentialgleichung $\Omega(x^i, u^k_J) = 0$ die Transformierte $\phi^*(\Omega)(y^j, w^l_J) = 0$. Für diese gilt, daß für eine Lösung $\tilde{w}^j(y^1, \ldots, y^n)$ von $\phi^*(\Omega) = 0$ die Punkte $\left(\tilde{x}^i = \phi^i(\tilde{w}^l_K(y^j), y^j), \tilde{u}^k = g^k(\tilde{w}^l_K(y^j), y^j)\right)$ auf dem Graphen einer Lösung $\tilde{u}^k(x^1, \ldots, x^n)$ von $\Omega = 0$ liegen.

Um nun $\phi_*(\Omega)$ zu finden, reicht es aus, die x^i und die u^k_J durch die y^j und w^l_K auszudrücken.

Da für $x^i = \phi^i(w^l_K, y^j)$ und $u^k = g^k(w^l_K, y^j)$ die transformierten Ausdrücke bereits feststehen, genügt es u^k_J mit $|J| = n > 0$ unter der Voraussetzung zu berechnen, daß für alle $|J| < n$ die Transformierten $u^k_J = h^k_J(w^l_K, y^j)$ bereits bekannt sind. Es wird dann $\phi^*(\Omega)(y^j, w^l_J) = \Omega(\phi^i(w^l, y^j), h^k_J(w^l_K, y^j))$.

Betrachtet man also $du^k_J = u^k_{J_i} dx^i$, setzt ein, $dh^k_J = u^k_{J_i} d\phi^i$, rechnet aus

$$\sum_l \left(D_{y^l} h^k_J\right) dy^l = \sum_{l,i} u^k_{J_i} \left(D_{y^l}\phi^i\right) dy^l \tag{1.3}$$

und vergleicht die Koeffizienten von dy^l so ergibt sich

$$D_{y^l} h^k_J = \sum_i u^k_{J_i} \left(D_{y^l}\phi^i\right) \tag{1.4}$$

Da $\left(D_{y^j}\phi^i\right)$ nach Voraussetzung invertierbar ist, hat man die Rekursionsformel

$$u^k_{J_i} = \sum_l D_{y^l} h^k_J \cdot \left(D_{y^l}\phi^i\right)^{-1} \tag{1.5}$$

1.3 Systeme linearer partieller Differentialgleichungen (lpdgl)

Eine Gleichung e der Form

$$\sum_{k,J} a_{kJ} u^k_J = b \tag{1.6}$$

heißt lineare partielle Differentialgleichung (lpdgl) für $u^1, \ldots, u^m$. Die u^i heissen *differentielle Unbestimmte* oder *abhängige Unbestimmte* der Gleichung e, die u^k_J sind die *Differentialmonome* von e. Die u^k verhalten sich gegenüber Differentiationen ∂_{x^i} wie unbestimmte Funktionen $u^k(x^1, \ldots, x^n)$, wir sprechen daher auch von einer lpdgl in den Funktionen $u^i(x^1, \ldots, x^n)$.

Falls $b = 0$, so nennen wir die Gleichung e *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.

Die b, a_{kJ} mögen dabei sämtlich einem Integritätsring R von Funktionen entstammen, dessen Elemente $f \in R$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ gestatten, also einem integren Differentialring. Wir nennen R auch Grundring, Koeffizientenring oder Definitionsring der Gleichung e und die lpdgl e auch lpdgl über R. Mit R_0 bezeichnen wir den *Konstantenring* $R_0 = \{a \in R | \partial_{x^i} a = 0\}$.

Dabei verstehe es sich hier wie im folgenden von selbst, daß eine Summe, wie jene in (1.6) nur über endlich viele Elemente zu erstrecken ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist.

Die so eingeführten lpdgl sind also eine Verallgemeinerung der weiter oben als Differentialgleichungen eingeführten Gleichungen, gehen aber für geeignete Wahl des Koeffizientenrings in diese über.

Wenn E ein System von lpdgl e ist, die alle über einem Grundring R definiert sind, so sagen wir E ist ein System von lpdgl über dem Grundring R.

Definition 1.3.1 *Sei E eine Menge von lpdgl mit Grundring R und*

1. $e, e' \in E \Rightarrow e + e' \in E$
2. $a \in R, e \in E \Rightarrow a \cdot e \in E$
3. $\frac{\partial}{\partial x^i} e \in E \quad$ *für* $\quad i = 1, \ldots, n$

Dann nennen wir E ein (Differential–) Ideal von lpdgl.

Lemma 1.3.1 *Sei E_α ein System von Idealen von lpdgl. Dann sind*

1. $\bigcap_\alpha E_\alpha$
2. $\sum_\alpha E_\alpha = \{e_1 + \cdots + e_k | k \in \mathbb{N},\, e_\nu \in E_{\alpha_\nu}\}$

ebenfalls Ideale von lpdgl, genannt Schnitt und Summe der E_α.

Für eine beliebige Menge E von lpdgl ist

$$(E) = \bigcap_{F \supseteq E,\, F \ Ideal} F \tag{1.7}$$

das von E erzeugte Ideal.

1.3.1 Koeffizientenringe von lpdgl

Obwohl wir oben beliebige Integritätsringe R mit Ableitungen ∂_{x^i} als Koeffizientenringe zugelassen haben, sind einige spezielle doch von besonderer Bedeutung und sollen hier kurz vorgestellt werden:

Bemerkung 1.3.1

1. *$R = \mathbb{C}(x^1, \ldots, x^n)$ der Körper der rationalen Funktionen in $x^1, \ldots, x^n$.*
2. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und zusammenhängend, $\mathcal{O}(U)$, der Ring der holomorphen Funktionen auf U, also ein Integritätsring. Jeder Unterring $R \subset \mathcal{O}(U)$ mit $\partial_{x^i} R \subseteq R$ ist ein geeigneter Koeffizientenring.*
3. *$R = \mathbb{C}[[x^1, \ldots, x^n]]_{formal}$ der Ring der formalen Potenzreihen in $x^1, \ldots, x^n$.*
4. *$R = \mathbb{C}[[x^1, \ldots, x^n]]$ der Ring der analytischen Potenzreihen in $x^1, \ldots, x^n$.*
5. *Sei R ein Integritätsdifferentialring obigen Typs, so ist $K = Q(R)$ sein Quotientenkörper ebenfalls ein integrer Differentialring und damit ein geeigneter Koeffizientenring. Im Fall 4 ist $K = Q(\mathbb{C}[[x^1, \ldots, x^n]])$ der Körper der* Keime meromorpher Funktionen um $(0, \ldots, 0)$.

Ein weiterer sehr wichtiger Koeffizientenkörper benötigt für seine Definition einige Vorbetrachtungen ([8]):

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge. Eine Teilmenge $A \subset U$ heisse *dünn*, wenn für jedes $p \in U$ ein Polyzylinder D mit $p \in D \subset U$ existiert, so

daß eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ auf A verschwindet. Für dünne Mengen A_1, A_2, $(A_i)_{i\in I}$ ist $A_1 \cup A_2$ und $\bigcap_i A_i$ ebenfalls dünn.

Eine abgeschlossene Menge $A \subset U$ heisse *vernachlässigbar*, falls sie nirgendwo dicht ist und wenn für jede offene, zusammenhängende Teilmenge $V \subset U$ und jede auf $V - A$ holomorphe und lokal beschränkte Funktion f eine holomorphe Erweiterung $\tilde{f}$ auf ganz V existiert. Eine dünne Teilmenge ist nach [8, Chap.I, Sec. C, Theor. 3] auch vernachlässigbar. Ausserdem ist $A_1 \cup A_2$ vernachlässigbar für A_1, A_2 vernachlässigbar.

Definition 1.3.2 *Wir betrachten nun die Menge der Funktionen $f_V \in \mathcal{O}(V)$, die auf Komplementen $V = U - A$ vernachlässigbarer Mengen A definiert sind. Zwei solche Funktionen f_{V_1}, f_{V_2} wollen wir identifizieren, wenn sie auf einer Menge $W \subset V_1 \cap V_2$ übereinstimmen, die wieder das Komplement einer vernachlässigbaren Menge in U ist. Die so erhaltene Menge von Funktionen bildet einen kommutativen Differentialring $\mathcal{K}(U)$ mit 1.*

Für U zusammenhängend, $A \subset U$ vernachlässigbar ist auch $U - A$ zusammenhängend, [8, p. 102]. Also ist $\mathcal{K}(U)$ auch Integritätsring, denn aus $f_{V_1} g_{V_2} = 0$ in $\mathcal{K}(U)$ folgt $f|_W g|_W = 0$ für ein geeignetes $W = U - A$. Da W zusammenhängend, ist $\mathcal{O}(W)$ ein Integritätsring und somit $f_W = 0$ oder $g_W = 0$.

Weiterhin ist $\mathcal{K}(U)$ sogar ein Körper. Um dies einzusehen betrachten wir ein f_V mit $V \subset U$ offen, $V = U - A$, A vernachlässigbar. Dann ist $B = \mathbf{V}(f_V) \subset V$ eine dünne, also vernachlässigbare Menge in V. Nach [8, Chap. III, Sec. B, Theor. 5] ist $A \cup B$ vernachlässigbar in U. Auf $W \stackrel{\text{def}}{=} U - (A \cup B)$ ist also das multiplikative Inverse $(f_V|_W)^{-1}$ von f_V erklärt.

Lemma 1.3.2 *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ zwei offene Gebiete und $\sigma : V \to U$ eine biholomorphe Abbildung von V nach U. Dann induziert σ einen Isomorphismus $\sigma^* : \mathcal{K}(U) \to \mathcal{K}(V)$, indem jede auf $U-A$, A vernachlässigbar, definierte holomorphe Funktion f auf die auf $V - \sigma^{-1}(A)$ definierte holomorphe Funktion $f \circ \sigma$ abgebildet wird.*

Beweis. Erstens ist zu zeigen, daß $B = \sigma^{-1}(A)$ mit einer in U vernachlässigbaren Menge A in V vernachlässigbar ist. Sei also $W \subseteq V$ offenes Gebiet und g in W lokal beschränkt sowie in $W - B$ holomorph. Dann ist $g \circ \sigma^{-1}$ in $\sigma(W)$ lokal beschränkt und in $\sigma(W) - \sigma(B) = \sigma(W) - A$ holomorph, also in $\sigma(W)$ holomorph. Also ist g in W holomorph und damit B vernachlässigbar.

Zweitens gilt, daß für Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(U)$ mit f_i holomorph auf $U - A_i$, A_i vernachlässigbar, und $f_1|_{U-A} = f_2|_{U-A}$ auch $f_1 \circ \sigma|_{V-\sigma^{-1}(A)} = f_2 \circ \sigma|_{V-\sigma^{-1}(A)}$ ist.

Drittens folgt für $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(U)$ mit f_i holomorph auf $U - A_i$, A_i vernachlässigbar, und $f_1 \circ \sigma|_{V-B} = f_2 \circ \sigma|_{V-B}$, B vernachlässigbar in V, $B \supseteq \sigma^{-1}(A_i)$, daß $f_1|_{U-\sigma(B)} = f_2|_{U-\sigma(B)}$ und somit $f_1 = f_2 \in \mathcal{K}(U)$.

Also ist σ^* ein wohldefinierter Isomorphismus. ■

1.3.2 Transformation von lpdgl

Sei $\mathcal{L}(R, u^1, \ldots, u^r)$ die Menge der lpdgl für $u^1, \ldots, u^r$ über einem Ring R und $\mathcal{L}(S, w^1, \ldots, w^s)$ die Menge der lpdgl für $w^1, \ldots, w^s$ über einem Ring S. R habe die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ und S die Derivationen $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$.

Weiter sei gegeben ein Homomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ für den folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ {\scriptstyle \frac{\partial}{\partial x^i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \alpha^j{}_i \frac{\partial}{\partial y^j}} \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array} \tag{1.8}$$

wobei die ${\alpha^j}_i \in S$ sind und $\det({\alpha^j}_i) \in S^*$ gilt. Ausserdem sei eine Zuordnung

$$u^i \xrightarrow{\varphi_*} \sum_{j,J} b^i_{jJ}\, w^j_J, \quad b^i_{jJ} \in S \tag{1.9}$$

gegeben. Dann können die Daten aus (1.8) und (1.9) als Bestimmungsstücke einer verallgemeinerten Koordinatentransformation von den $\mathcal{L}(R, u^1, \ldots, u^r)$ in die $\mathcal{L}(S, w^1, \ldots, w^s)$ aufgefasst werden.

Für diese Koordinatentransformation gilt

$$\varphi_*\left(\sum a_{iJ} u^i_J\right) = \varphi_*\left(\sum a_{iJ}\, \partial^{j^1}_{x^1} \cdot \cdots \cdot \partial^{j^n}_{x^n} u^i\right) = \tag{1.10}$$

$$= \sum \varphi(a_{iJ}) \varphi_*\left(\partial_{x^1}\right)^{j_1} \cdot \cdots \cdot \varphi_*\left(\partial_{x^n}\right)^{j_n} \varphi_*(u^i) \tag{1.11}$$

wodurch $\varphi_* : \mathcal{L}(R, u^1, \ldots, u^r) \longrightarrow \mathcal{L}(S, w^1, \ldots, w^s)$ eindeutig festgelegt ist.

Die Beziehung zu der Koordinatentransformation für allgemeinere DGL, wie wir sie in 1.2.2 betrachtet haben, ergibt sich, wenn man zum Beispiel $R = \mathbb{C}[[x^1, \ldots, x^n]]$, $S = \mathbb{C}[[y^1, \ldots, y^n]]$ und $u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n), w^j = w^j(y^1, \ldots, y^n)$ wählt.

Der Morphismus $\varphi : R \to S$ wird dann durch eine invertierbare analytische Abbildung $x^i = \sigma^i(y^1, \ldots, y^n), i = 1, \ldots, n$ induziert. Das Diagramm (1.8) führt auf die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \sigma = {\alpha^j}_i \frac{\partial}{\partial y^j}(f \circ \sigma) \tag{1.12}$$

$$= {\alpha^j}_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \circ \sigma\right) \cdot \frac{\partial \sigma^k}{\partial y^j} \tag{1.13}$$

also

$${\alpha^j}_i \frac{\partial \sigma^k}{\partial y^j} = \delta^k_i \tag{1.14}$$

und somit ist die Matrix $({\alpha^j}_i)_{ji}$ gleich $(\partial\sigma^i/\partial y^j)^{-1}_{ij}$.

1.4 Normalformen von Systemen von lpdgl

1.4.1 Termordnungen

Definition 1.4.1 *Sei u^k_J das System der Differentialmonome für $u^1, \ldots, u^m$ (mit $u^i(x^1, \ldots, x^n)$). Eine Totalordnung $<$ auf den u^k_J heißt Termordnung, wenn*

1. $u^k < D_L u^k$
2. $u^k_J < u^l_K \Rightarrow D_M u^k_J < D_M u^l_K$

Es gilt

Satz 1.4.1 *Jede Termordnung ist eine Wohlordnung*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß jede Folge

$$u^{k_1}_{J_1} > u^{k_2}_{J_2} > u^{k_3}_{J_3} > \ldots \tag{1.15}$$

für irgendein $i > 0$ abbricht. Wenn $m = 1$ so folgt dies aus der gewählten Definition 1.4.1 einer Termordnung und dem Lemma von Dickson ([4, 2.4, Theorem 5]). Für $m > 1$ betrachte man für ein festgewähltes k mit $1 \leq k \leq m$ die Teilfolge von (1.15), für die $k_i = k$ ist. Dies entspricht dem Fall $m = 1$ und dementsprechend bricht die Teilfolge nach endlich vielen Gliedern ab. Da dies für jedes k gilt, bricht auch die Gesamtfolge ab. ■

Beispiel 1.4.1 *Einige bedeutsame Termordnungen sind*

1. *Die Termordnung $u_J^k < u_K^l$ für $k < l$ oder $k = l$ und $J < K$ (wobei $J < K$ bedeute: es gibt ein ν_0 mit $j_\nu = k_\nu$ für alle $\nu > \nu_0$ und $j_{\nu_0} < k_{\nu_0}$), heißt lexikographische Termordnung.*

2. *Eine Termordnung mit $u_J^i < u_L^k$ für alle $|J| < |L|$ nennen wir eine total–degree Ordnung. Falls nichts weiter gesagt wird, sei damit speziell die total–degree Ordnung $u_J^k < u_K^l$ für $|J| < |K|$ oder $|J| = |K|$ und $k < l$ oder $|J| = |K|$ und $k = l$ und $J < K$ gemeint.*

3. *Es sei A eine $n \times l$–Matrix mit nichtnegativen Einträgen, B_i, $i = 1, \ldots, m$, eine Menge von l–Vektoren mit nichtnegativen Einträgen. Dann legt*

$$u_J^i < u_L^k \Leftrightarrow JA + B_i <_{lex} LA + B_k \tag{1.16}$$

bei geeigneter Wahl von A und B_i eine sogenannte Matrixtermordnung *fest. Dabei bedeute $(d_1, \ldots, d_l) >_{lex} (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_l)$, daß $d_\nu = \bar{d}_\nu$ für $\nu < \nu_0$ und $d_{\nu_0} > \bar{d}_{\nu_0}$ ist.*

Die beiden obigen Termordnungen sind dann als Matrixtermordnungen darstellbar.

Nach Einführung einer Termordnung können wir jede lpdgl $e = \sum a_{kJ} u_J^k - b = 0$ als

$$e = a_{k_0 J_0} u_{J_0}^{k_0} + \sum_{\nu=1}^{N} a_{k_\nu J_\nu} u_{J_\nu}^{k_\nu} - b = 0 \tag{1.17}$$

mit $a_{k_\mu J_\mu} \neq 0$ und $u_{J_\mu}^{k_\mu} > u_{J_{\mu+1}}^{k_{\mu+1}}$ für $0 \leq \mu \leq N$ schreiben

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung bekommen dann besondere Namen

Bezeichnung 1.4.1

lcoef$(e) = a_{k_0 J_0}$ *heißt* führender Koeffizient.

lmon$(e) = u_{J_0}^{k_0}$ *heißt* führendes Monom.

lterm$(e) = a_{k_0 J_0} u_{J_0}^{k_0}$ *heißt* führender Term.

Die $a_{k_\mu J_\mu} u_{J_\mu}^{k_\mu}$ heißen Terme, *die $a_{k_\mu J_\mu}$ heißen* Koeffizienten *und die $u_{J_\mu}^{k_\mu}$ heißen* Monome *von e. b heißt* konstanter Term *oder* konstantes Glied *von e. Ihm wird das Monom* **1** *zugeordnet, das in jeder Termordnung $<$ vor allen u_J^k liegen soll.*

Die $a_{k_\mu J_\mu}$ heißen Koeffizienten von $u_{J_\mu}^{k_\mu}$.

Ein Monom u_J^k mit $k = k_\mu$, $J = J_\mu$ für ein geeignetes μ, heißt in e enthalten *andernfalls nennen wir e* frei von u_J^k.

Statt führender Koeffizient, führendes Monom, führender Term sagen wir auch Leitkoeffizient, Leitmonom, Leitterm.

Ist der Leitkoeffizient gleich 1, *so nennen wir e* normiert.

Ferner sei

reduct$(e) = \sum_{\nu=1}^{N} a_{k_\nu J_\nu} u_{J_\nu}^{k_\nu} - b$ *das* Reduktum *von e.*

coef$(e, u_J^k) = \begin{cases} a_{kJ} & \text{falls } u_J^k \text{ in } e \text{ enthalten.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ *der* Koeffizient von u_J^k in e.

supp$(e) = \{u_L^m | \text{coef}(e, u_L^m) \neq 0\}$ *der* Träger *von e.*

Bemerkung 1.4.1 *Wir haben oben das Monom* $\mathbf{1}$ *eingeführt, das dem konstanten Glied einer lpdgl zugeordnet wird, Weiter führen wir ein Monom* $\mathbf{0}$ *ein, das wir der Gleichung* $e = 0$ *zuordnen und für das* $D_J(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ *und* $D_J(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *gilt. Die Ordnung* $<$ *erweitern wir nach der Regel* $\mathbf{1} < \mathbf{0} < u^i_J$ *für alle* i, J. *Eine so erweiterte Termordnung* $<$ *bleibt eine Totalordnung und auch eine Wohlordnung. Ausserdem gilt für sie* $m < D_J(m)$ *und* $m_1 < m_2 \Rightarrow D_J(m_1) < D_J(m_2)$ *für alle Monome* m, m_1, m_2, *wie in Definition 1.4.1 gefordert.*

Für eine totalgeordnete Menge M können wir eine Totalordnung auf der Menge ihrer endlichen Teilmengen einführen:

Definition 1.4.2 *Sei* $(M, <)$ *eine totalgeordnete Menge,* $P_{finite}(M) = \{N \subseteq M || N| < \infty\}$ *und* $N_{>m} = \{n \in N | n > m\}$ *für* $N \subseteq M$, $m \in M$. *Dann sei*

$$N_1 > N_2 \Leftrightarrow \exists m \in N_1, m \notin N_2 : (N_1)_{>m} = (N_2)_{>m} \tag{1.18}$$

für $N_1, N_2 \in P_{finite}(M)$.

Bemerkung 1.4.2 *Aus Definition 1.4.2 folgt* $\emptyset < N$ *für alle* $N \subseteq M$, $N \neq \emptyset$. *Zum Beweis wähle man* $m = \max(N)$.

Bemerkung 1.4.3 *Seien* $N_1, N_2 \in P_{finite}(M)$ *und* N_2 *entstehe aus* N_1 *durch Weglassen eines* $m \in N_1$ *und Hinzufügen einer, möglicherweise leeren, Menge von* $m' < m$. *Dann ist* $N_2 < N_1$.

Es gilt:

Satz 1.4.2 *Ist in den Bezeichnungen von Definition 1.4.2 die Menge* $(M, <)$ *wohlgeordnet, so gilt dies auch für* $(P_{finite}(M), <)$.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine unendliche Folge

$$N_1 > N_2 > N_3 > \dots \tag{1.19}$$

Dann ist $\max(N_i) \geq \max(N_{i+1})$, so daß wegen der Wohlgeordnetheit von M ein $i_1 > 0$ existiert mit $\max(N_i) = m_1$ für alle $i \geq i_1$. Ebenso hat jedes N_i mindestens ein Element, da sonst die Folge abbräche (Bemerkung 1.4.2).

Wir nehmen nun an, es seien bereits $i_\nu \geq i_{\nu-1} \geq \dots \geq i_1$ gefunden, so daß für $i \geq i_\mu$, $1 \leq \mu \leq \nu$ die μ größten Elemente von N_i gleich seien. Insbesondere enthalte jedes N_i mit $i \geq i_\mu$ auch mindestens μ Elemente. Wir wollen nun ein $i_{\nu+1} \geq i_\nu$ finden, für daß diese Behauptung entsprechend gilt.

Zunächst einmal muß jedes N_i mit $i \geq i_\nu$ auch $\nu + 1$ Elemente enthalten. Enthielte nämlich eines, N_{i_0}, nur ν Elemente, so müßte dies aufgrund der Induktionsannahme auch für N_{i_0+1} gelten, da sonst $N_{i_0+1} > N_{i_0}$. Somit wäre die Folge stationär.

Da unendlich abnehmende Folgen in M nicht vorkommen, muß aber nun auch die Folge der ν+1-st größten Elemente in N_i, $i \geq i_\nu$ ab einem bestimmten i stationär werden. Dieses ist unser gesuchtes $i_{\nu+1}$.

Bezeichnen wir nun das ν-t größte Element eines N_i, $i \geq i_\nu$ mit m_ν, so haben wir eine unendliche Folge $m_\nu > m_{\nu+1}$ konstruiert. Ein solche kann aber in M nicht vorkommen. ■

Korollar 1.4.1 *Sei in den Bezeichnungen von Definition 1.4.2 eine Folge* $N_1, N_2, N_3, \dots$ *gegeben, bei der* N_{i+1} *aus* N_i *durch Weglassen eines* $m \in N_i$ *und Hinzufügen einer, möglicherweise leeren, Menge von* $m' < m$ *entsteht. Dann bricht* N_i *ab.*

Bemerkung 1.4.4 *Indem man die vorigen Betrachtungen auf die Menge $\mathcal{M}$ der Monome u_J^k mit einer gewählten Termordnung überträgt, ergibt sich entsprechend eine Wohlordnung auf der Menge der supp(e) für lpdgl e die aus den u_J^k aufgebaut sind.*

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreiben wir auch $e < f$ falls $\mathrm{supp}(e) < \mathrm{supp}(f)$. Es gibt dann allerdings $e \neq f$ für die weder $e < f$ noch $f < e$ gilt. Allerdings ist natürlich $e \neq f$ für $e < f$.

1.4.2 Reduktionstheorie

Die folgenden Betrachtungen gelten ohne weitere Überlegung, wenn man die einschränkende Annahme macht, daß alle vorkommenden lpdgl homogen sind. Allerdings ist diese Einschränkung nicht wirklich erforderlich, und ich werde mit einigen Hinweisen verdeutlichen, wie man die Überlegungen auf den allgemeinen Fall wo auch inhomogene lpdgl zugelassen sind, zu verallgemeinern hat.

Definition 1.4.3 *Sei F ein System von lpdgl, $f = \beta u + r \in F$ wobei u das Leitmonom β der Leitkoeffizient und r das Reduktum von f sei. Weiter sei $e = \alpha D_J u + w$ eine lpdgl, wo $\alpha \neq 0$ und w frei von $D_J u$ ist. Dann nennen wir die Bildung von*

$$e' = \alpha(D_J(-r/\beta)) + w = e - \alpha D_J(f/\beta) \tag{1.20}$$

eine Reduktion erster Art von e durch F. *Um genauer auf das reduzierende f Bezug zu nehmen, sprechen wir auch von einer Reduktion von e durch f oder von einer Reduktion von e durch f am Monom $D_J u$. Wir schreiben abkürzend auch*

$$e \longrightarrow e' \text{ oder } e \xrightarrow{F} e' \text{ oder } e \xrightarrow{f} e' \tag{1.21}$$

Definition 1.4.4 *Unter Verwendung der Bezeichnungen von Definition 1.4.3 nennen wir die Bildung von*

$$e'' = \beta e - \alpha D_J f \tag{1.22}$$

analog eine Reduktion zweiter Art von e durch F *(von e durch f, von e durch f am Monom $D_J u$), wofür wir dann*

$$e \overset{r_2}{\longrightarrow} e'' \text{ oder } e \overset{r_2}{\xrightarrow{F}} e'' \text{ oder } e \overset{r_2}{\xrightarrow{f}} e'' \tag{1.23}$$

schreiben.

Bemerkung 1.4.5 *Eine Reduktion (erster oder zweiter Art) einer inhomogenen lpdgl $e = \sum a_{iJ} u_J^i - b$ am absoluten Glied $b \neq 0$ ergibt $e_0 = \sum a_{iJ} u_J^i$.*

Bemerkung 1.4.6 *Sowohl bei einer Reduktion erster Art, als auch bei einer Reduktion zweiter Art, enthält das Ergebnis das Monom $D_J u$ nicht mehr, dafür können aber neue Monome v_i enthalten sein, für die $v_i < D_J u$ ist. Monome $v > D_J u$ treten nicht hinzu.*

Bemerkung 1.4.7 *Es gilt stets*

$$e \xrightarrow{f} e' \Rightarrow \gamma e \xrightarrow{f} \gamma e' \text{ und } \gamma e \overset{r_2}{\xrightarrow{f}} \gamma e' \tag{1.24}$$

wobei die Reduktionen überall am gleichen Monom erfolgen sollen.

Sind die Koeffizienten von e und f aus einem (Differential–)Ring R, so gilt dies auch für die Koeffizienten der Reduktion zweiter Art von e mit f. Bei der Reduktion erster Art sind die Koeffizienten hingegen aus R_β. Aus diesem Grund sind Reduktionen zweiter Art für die praktische Ausführung der Rechnung oft vorteilhafter. Reduktionen erster Art sind aber für die Herleitung der im Folgenden zu gebenden Beweise günstiger, so daß wir auch das Verhältnis dieser beiden Reduktionsarten zueinander betrachten werden.

Bemerkung 1.4.8 *Sei F, e wie oben. Dann gilt*

$$\nexists e' : e \xrightarrow{F} e' \Leftrightarrow \nexists e'' : e \overset{r_2}{\xrightarrow{F}} e'' \tag{1.25}$$

In diesem Fall sagen wir: e reduziert bezüglich F.

Bezeichnung 1.4.2 *Durch $e \xrightarrow{F} e'$ (bei gegebenem F) wird eine Relation unter den lpdgl definiert. Den* transitiven *bzw.* reflexiv–transitiven *Abschluß der Relation $\xrightarrow{F}$ bezeichnen wir mit $\xrightarrow{F+}$, $\xrightarrow{F*}$. Analog erklären wir $\overset{r_2}{\xrightarrow{F+}}$, $\overset{r_2}{\xrightarrow{F*}}$.*

Lemma 1.4.1 *Sei e_i eine Folge von lpdgl mit $e_i \longrightarrow e_{i+1}$ wobei $\longrightarrow$ für eine Reduktion erster oder zweiter Art stehe. Dann bricht e_i ab.*

Beweis. Bemerkung 1.4.6, Bemerkung 1.4.4 und Korollar 1.4.1. ■

Wir sagen auch: $\longrightarrow$ und $\overset{r_2}{\longrightarrow}$ sind *noethersche* Reduktionsrelationen.

Bezeichnung 1.4.3 *Seien e_1, e_2 zwei lpdgl. Wenn ein f existiert mit $e_1 \overset{*}{\longrightarrow} f \overset{*}{\longleftarrow} e_2$, so schreiben wir $e_1 \downarrow e_2$, und nennen f einen* gemeinsamen Nachfolger *von e_1 und e_2 (bezüglich oder für $\longrightarrow$).*

Bezeichnung 1.4.4 *Sei F ein System von lpdgl, $\xrightarrow{F}$ die zugehörige Reduktionsrelation erster oder zweiter Art. Eine lpdgl e heiße* Konfluenzanfangspunkt *wenn für alle e_1, e_2 gelte*

$$\begin{array}{ccc} & e & \\ {\scriptstyle F}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle F} \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ e_1 & & e_2 \end{array} \Rightarrow e_1 \downarrow e_2 \quad \textit{für } \xrightarrow{F} \tag{1.26}$$

Sind alle e Konfluenzanfangspunkte, so heiße $\xrightarrow{F}$ konfluent.

Bemerkung 1.4.9 *Um uns Fallunterscheidungen zu ersparen, führen wir den Begriff der* Nullreduktion *ein.*

Die Ersetzung von γu durch γv in einem Ausdruck einer ldpgl $\gamma u + r$, in dem r frei von u ist, soll Nullreduktion *mit $f = u - v$ heißen, falls $\gamma = 0$ ist. Eine Nullreduktion ändert also an einem Ausdruck nichts, überführt ihn aber in eine Form, in der er ersichtlich frei von u ist.*

Wenn sich ein Ausdruck e_1 in einen Ausdruck e_2 durch eine Kette von Reduktionen überführen läßt, von denen einige Nullreduktionen sind, wird e_1 natürlich schon allein durch die in dieser enthaltenen Reduktionen, die keine Nullreduktionen sind, in e_2 überführt. Wir nennen diese auch wirkliche Reduktionen.

Lemma 1.4.2 *Es seien e_1, e_2, p drei lpdgl. Dann gilt*

$$e_1 \xrightarrow{f} e_2 \Rightarrow (e_1 + p) \downarrow (e_2 + p) \quad \textit{für } \xrightarrow{f} \quad \textit{(Summen–Halbkompatibilität)} \tag{1.27}$$

Beweis. Sei $e_1 = \alpha u + w$, w frei vom Monom u. Die Reduktion finde vermittels $f = u - v$ statt, wobei u das Leitmonom von f ist. Nach Definition der Reduktion

erster Art bilden diese Annahmen keine Einschränkung der Allgemeinheit. Es ist dann $e_2 = \alpha v + w$.

Außerdem können wir $p = \beta u$ annehmen, da für $p = \beta u + p_1$ mit p_1 frei von u auf jeden Fall $e_1 + p_1 \longrightarrow e_2 + p_1$ gilt.

Damit ist

$$e_1 + p = (\alpha + \beta)u + w, \quad e_2 + p = \beta u + \alpha v + w \tag{1.28}$$

Fuhren wir also die in (1.28) möglichen Reduktionen an u jeweils aus, so erhalten wir $e_1 + p \overset{*}{\longrightarrow} f$ und $e_2 + p \overset{*}{\longrightarrow} f$ mit $f = (\alpha + \beta)v + w$. Man beachte, daß hier $\overset{*}{\longrightarrow}$ steht, denn die Reduktion an u kann ja durchaus eine Nullreduktion gewesen sein (nämlich im Fall $\alpha + \beta = 0$). ■

Lemma 1.4.3 *Seien e_1, e_2, p drei lpdgl, F ein System von lpdgl. Es gelte*

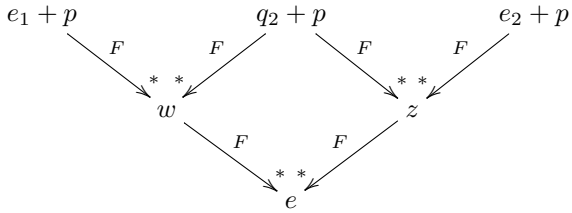
$$e_1 = q_1 \xrightarrow{F} q_2 \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} q_r = e_2 \tag{1.29}$$

und alle $q_i + p$, $i = 2, \ldots, r-1$ seien Konfluenzanfangspunkte für $\xrightarrow{F}$.

Dann ist $e_1 + p \downarrow e_2 + p$ für $\xrightarrow{F}$

Beweis. Für $r = 2$ folgt das Ergebnis aus Lemma 1.4.2.

Es sei also $r > 2$ und der Satz für $r - 1$ schon bewiesen. Es gilt dann $q_2 + p \xrightarrow{F*} z \overset{*F}{\longleftarrow} e_2 + p$, sowie wegen Lemma 1.4.2 $e_1 + p \xrightarrow{F*} w \overset{*F}{\longleftarrow} q_2 + p$. Da $q_2 + p$ Konfluenzanfangspunkt ist, folgt



(1.30)

■

Lemma 1.4.4 *Es seien u ein Monom, p_i mit $1 \leq i \leq r$ eine Familie von lpdgl mit $p_i < u$ und $p_i \xrightarrow{F*} q_i$. Weiter seien alle $e < u$ Konfluenzanfangspunkte für $\xrightarrow{F}$.*

Dann gilt $p_1 + \cdots + p_r \downarrow q_1 + \cdots + q_r$. Insbesondere folgt aus $q_1 + \cdots + q_r = 0$, daß $p_1 + \cdots + p_r \xrightarrow{F*} 0$.

Beweis. Der Fall $r = 1$ ist trivial, für alle $r < s$ sei der Satz richtig. Es ist also

(1.31)

Bezeichnen wir die Glieder der Kette $p_1 + \cdots + p_{s-1} \xrightarrow{F*} w$ mit k_i und die Glieder der Kette $q_1 + \cdots + q_{s-1} \xrightarrow{F*} w$ mit l_i so gilt $k_i + p_s < u$ und $l_i + q_s < u$. $e < u$ ist nämlich gleichbedeutend damit, daß alle Monome in e kleiner als u sind, so daß mit $e, e' < u$ auch $e + e' < u$ ist. Nach Lemma 1.4.3 ist also $p_1 + \cdots + p_s \downarrow w + p_s$ und $w + q_s \downarrow q_1 + \cdots + q_s$. Für die Glieder v_i der Kette $p_s \xrightarrow{F*} q_s$ gilt ebenso $v_i + w < u$ und damit $w + p_s \downarrow w + q_s$. Nimmt man dies zusammen, so kann man $p_1 + \cdots + p_s \downarrow q_1 + \cdots + q_s$ folgern, denn die verbindenden Konfluenzen können stets konstruiert werden, da alle präsumptiven Konfluenzanfangspunkte $< u$ sind. ■

Lemma 1.4.5 *Es seien e_1, e_2 zwei lpdgl und $\partial = \partial_{x_i}$ Dann gilt*

$$e_1 \xrightarrow{f} e_2 \Rightarrow (\partial e_1) \downarrow (\partial e_2) \quad \textit{für} \xrightarrow{f} \quad \textit{(Differential–Halbkompatibilität)} \tag{1.32}$$

Beweis Es sei $e_1 = \alpha\,\partial u + \beta u + \gamma u_1 + r$. Dabei sei u das Monom, an dem reduziert wird, $\partial u_1 = u$ und r frei von u_1, u und ∂u. Die Reduktion werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit vermittelt durch $f = u - (\varepsilon u_1 + s)$ wobei u das Leitmonom und s frei von u_1 sei. Wir haben also

$$e_1 = \alpha\,\partial u + \beta u + \gamma u_1 + r \tag{1.33}$$
$$e_2 = \alpha\,\partial u + \beta(\varepsilon u_1 + s) + \gamma u_1 + r \tag{1.34}$$
$$u \longrightarrow \varepsilon u_1 + s \tag{1.35}$$
$$\partial u \longrightarrow \varepsilon u + \partial\varepsilon\, u_1 + \partial s \tag{1.36}$$
$$\partial e_1 = \alpha\,\partial\partial u + (\partial\alpha + \beta)\partial u + (\partial\beta + \gamma)u + \partial\gamma\, u_1 + \partial r \tag{1.37}$$
$$\partial e_2 = \alpha\,\partial\partial u + \partial\alpha\,\partial u + (\beta\varepsilon + \gamma)u + \partial(\beta\varepsilon + \gamma)\, u_1 + \partial r + \partial(\beta s) \tag{1.38}$$

In (1.37) und (1.38) sind die Terme, in denen u und ∂u nicht explizit auftauchen aufgrund der Vorraussetzungen über r und s auch wirklich frei von u und ∂u. Wir erhalten also nach Ausführung der Reduktion (1.36):

$$\begin{aligned}\partial e_1 = {} & \alpha\partial\partial u \\ & + ((\partial\alpha + \beta)\,\varepsilon + \partial\beta + \gamma)\, u + ((\partial\alpha + \beta)\,\partial\varepsilon + \partial\gamma)\, u_1 \\ & + (\partial\alpha + \beta)\partial s + \partial r\end{aligned} \tag{1.39}$$
$$\begin{aligned}\partial e_2 = {} & \alpha\partial\partial u \\ & + (\partial\alpha\,\varepsilon + \beta\varepsilon + \gamma)\, u + (\partial\alpha\,\partial\varepsilon + \partial(\beta\varepsilon + \gamma))\, u_1 \\ & + \partial\alpha\,\partial s + \partial r + \partial(\beta s)\end{aligned} \tag{1.40}$$
$$\begin{aligned}= {} & \alpha\partial\partial u \\ & + ((\partial\alpha + \beta)\,\varepsilon + \gamma)\, u + ((\partial\alpha + \beta)\,\partial\varepsilon + (\varepsilon\partial\beta + \partial\gamma))\, u_1 \\ & + \partial\alpha\,\partial s + \partial r + \partial(\beta s)\end{aligned} \tag{1.41}$$
$$\begin{aligned}= {} & \alpha\partial\partial u \\ & + ((\partial\alpha + \beta)\,\varepsilon + \gamma)\, u + ((\partial\alpha + \beta)\,\partial\varepsilon + (\varepsilon\partial\beta + \partial\gamma))\, u_1 \\ & + (\partial\alpha + \beta)\,\partial s + \partial r + \partial\beta\, s\end{aligned} \tag{1.42}$$

Erneut gilt, daß das Monom u nur explizit auftaucht, und durch die Ersetzung von $\partial\beta\, u$ gemäß (1.35) der Ausdruck (1.39) in (1.42) übergeht. Also gehen (1.39) und (1.42) durch die Reduktion an u mit (1.35) in einen gemeinsamen Nachfolger z über. ■

Bemerkung 1.4.10 *Für den Fall inhomogener lpdgl ist im vorigen Lemma nur der Fall $u = \mathbf{1}$ näher zu betrachten. u_1 existiert dann nicht, s, ε und α sind gleich 0. Man sieht unschwer, daß das Lemma auch in diesem Fall gültig bleibt.*

Lemma 1.4.6 *Seien e_1, e_2 zwei lpdgl, F ein System von lpdgl, $\partial = \partial_{x^i}$. Es gelte*

$$e_1 = q_1 \xrightarrow{F} q_2 \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} q_r = e_2 \tag{1.43}$$

und alle ∂q_i, $i = 2, \ldots, r-1$ seien Konfluenzanfangspunkte für $\xrightarrow{F}$.

Dann ist $\partial e_1 \downarrow \partial e_2$ für $\xrightarrow{F}$. Insbesondere ist für $e_2 = 0$ $\partial e_1 \xrightarrow{F^*} 0$.

Beweis. Wie Lemma 1.4.3 unter Benutzung von Lemma 1.4.5 an Stelle von Lemma 1.4.2 ■

Lemma 1.4.7 *Es sei u ein Monom und alle $e < u$ Konfluenzanfangspunkte. Weiter seien e_1, e_2 zwei lpdgl mit $e_1 \xrightarrow{F*} e_2$, F ein System von lpdgl und $\partial = \partial_{x^i}$. Es sei $e_1 < u$ und $\partial e_1 < u$. Dann gilt $\partial e_1 \downarrow \partial e_2$, insbesondere ist für $e_2 = 0$ $\partial e_1 \xrightarrow{F*} 0$.*

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, daß die Bedingungen an die q_i in Lemma 1.4.6 erfüllt sind. Man sieht, daß dies jedenfalls dann der Fall ist, wenn man aus $q_i < u$ und $\partial q_i < u$ auf $q_{i+1} < u$ und $\partial q_{i+1} < u$ schließen kann, da ja wegen $q_1 = e_1 < u$ und $\partial q_1 = \partial e_1 < u$ die Grundlage für einen induktiven Schluß gegeben ist. Wenn $q_i = \alpha v + r$ mit Leitmonom v und r frei von v ist, so ist jedenfalls $v < u$, und auch das Leitmonom ∂v von ∂q_i ist wegen $\partial q_i < u$ kleiner als u. Damit gilt für das Leitmonom v_1 von q_{i+1} — einer Reduktion von q_i — $v_1 \leq v$, also $\partial v_1 \leq \partial v < u$. ∂v_1 ist aber das Leitmonom von ∂q_{i+1}, also sind alle Monome von ∂q_{i+1} kleiner u und damit $\partial q_{i+1} < u$. Damit ist der Induktionsschluß vollzogen und Lemma 1.4.7 bewiesen. ■

Lemma 1.4.8 *Es sei $e = \alpha u_1 + \beta u_2 + r$ eine lpdgl, wobei $u_1 > u_2$ Monome seien und r frei von u_1 und u_2 sei. Es seien f_1 und f_2 zwei lpdgl und $e \xrightarrow{f_1} e_1$ eine Reduktion von e an u_1, $e \xrightarrow{f_2} e_2$ eine Reduktion von e an u_2. Es sei $F = \{f_1, f_2\}$. Dann ist $e_1 \downarrow e_2$ für $\xrightarrow{F}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $f_1 = u_1 - (\gamma u_2 + w_1)$ und $f_2 = u_2 - v_2$ angenommen werden, wobei u_1 bzw. u_2 die Leitmonome von f_1 bzw. f_2 und w_1, v_2 frei von u_1, u_2 sind. Damit wird $e_1 = \alpha w_1 + (\alpha\gamma + \beta)u_2 + r$ und $e_2 = \alpha u_1 + \beta v_2 + r$. Erneut tauchen u_1 und u_2 nur explizit auf, und wir reduzieren nun e_1 an u_2 und e_2 an u_1 und erhalten $e_1' = \alpha w_1 + (\alpha\gamma + \beta)v_2 + r$ sowie $e_2' = \alpha w_1 + \alpha\gamma u_2 + \beta v_2 + r$. Reduziert man jetzt das wieder nur explizit auftauchende u_2 in e_2' so ergibt sich $e_2'' = \alpha w_1 + \alpha\gamma v_2 + \beta v_2 + r$. Mit $e \overset{\text{def}}{=} e_2'' = e_1'$ gilt also $e_1 \xrightarrow{F*} e \xleftarrow{*F} e_2$. ■

Bezeichnung 1.4.5 *Für zwei lpdgl e, e' bedeute $e \cong e'$, daß ein $\alpha \neq 0$ existiert mit $e = \alpha e'$.*

Lemma 1.4.9 *Seien e, e_1 zwei lpdgl, F ein System von lpdgl. Es gelte $e \overset{r_2}{\xrightarrow{F}} e_1$. Weiterhin seien alle $e' < e$ Konfluenzanfangspunkte von $\xrightarrow{F}$. Dann existieren lpdgl $k \cong k'$ mit*

$$\begin{array}{ccccc} & & e & & \\ & {\scriptstyle F}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle F} & \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & & & \\ k' & \xrightarrow{\cong} & k & \xleftarrow{F} & e_1 \end{array} \qquad (1.44)$$

Beweis. Es sei $e = \alpha D_J u + w$, w frei vom Monom $D_J u$. Die Reduktion $e \overset{r_2}{\xrightarrow{F}} e_1$ am Monom $D_J u$ werde vermittelt durch $f = \beta u - r$, wobei u das Leitmonom von f und r frei von u sei.

Dann ist

$$e_1 = \beta\alpha D_J u + \beta w - \alpha D_J(\beta u) + \alpha D_J r \qquad (1.45)$$

$$= \beta w - \alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(u) + \alpha D_J r \qquad (1.46)$$

Man betrachte jetzt die Reduktionskette

$$-\alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(u) = q_1 \xrightarrow{f} q_2 \xrightarrow{f} \cdots \tag{1.47}$$

$$\cdots \xrightarrow{f} q_s = -\alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(r/\beta)$$

die entstehe, indem, beginnend vom kleinsten $D_F(u)$ an, sukzessive $D_F(u)$ mit f auf erste Art reduziert, also $D_F(u)$ durch $D_F(r/\beta)$ ersetzt werde. Wir bemerken, daß $D_F(r/\beta)$ nur Monome $< D_F(u)$ enthält, so daß die Reduktionskette wohldefiniert ist. Nullreduktionen werden dabei ausgeführt, führen aber nicht zum Eintrag eines q_i.

Da alle $q_i + \beta w + \alpha D_J r$ das Monom $D_J u$ nicht enthalten, welches in e vorkommt, und mit e in allen Monomen übereinstimmen, die $> D_J u$ sind, folgt $q_i + \beta w + \alpha D_J r < e$.

Alle diese Ausdrücke sind also Konfluenzanfangspunkte und wir können Lemma 1.4.3 anwenden. Es ergibt sich

$$e_1 = q_1 + \beta w + \alpha D_J r \xrightarrow{F^*} z \xleftarrow{{}^*F} e_s = q_s + \beta w + \alpha D_J r \tag{1.48}$$

Wir rechnen e_s weiter aus

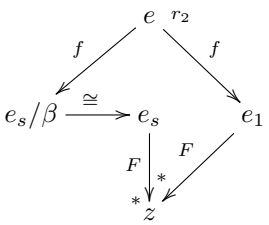
$$e_s = -\alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(r/\beta) + \beta w + \alpha D_J r \tag{1.49}$$

$$= -\alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(r/\beta) + \beta w + \alpha D_J\left(\beta(r/\beta)\right) \tag{1.50}$$

$$= -\alpha \sum_{\substack{E+F=J \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(r/\beta) + \beta w + \alpha \sum_{E+F=J} c_{E,F} D_E(\beta)\, D_F(r/\beta) \tag{1.51}$$

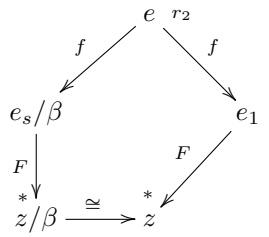
$$= \alpha\beta D_J(r/\beta) + \beta w \tag{1.52}$$

Die Reduktion erster Art von e mit f an $D_J u$ ist aber nichts anderes als $D_J(r/\beta) + w = e_s/\beta$. Wir haben also



(1.53)

also auch



(1.54)

Mit $k' = z/\beta$ und $k = z$ ist damit der Beweis erbracht. ■

Bemerkung 1.4.11 *Für den Fall inhomogener lpdgls ist nur die Möglichkeit von* $u = \mathbf{1}$, $e = \alpha u + w$, $f = -\beta u$ *(in den obigen Bezeichnungen) in Betracht zu ziehen. Für diesen Fall ist das Lemma aber trivialerweise richtig, weil* $e_1 = k = k' = e_0$ *mit* e_0 *dem homogenen Teil von* e.

Definition 1.4.5 *Es seien* $u_1 = u_J^\nu$ *und* $u_2 = u_K^\nu$ *zwei Monome zur selben Funktion. Wie man sich leicht überlegt, gibt es unter den* u *mit* $u = D_L u_1 = D_M u_2$ *ein eindeutig bestimmtes* u', *so daß jedes andere dieser Art als* $D_N u'$ *gebildet werden kann. Es ist* $u' = D_S u^\nu$ *mit* $S = J \vee K$. *Dabei ist* $J \vee K \stackrel{def}{=} (max(j_p, k_p))$ *für* $J = (j_p)$, $K = (k_p)$. *Mit* J_1 *und* K_1 *bezeichnen wir* $S - J$ *und* $S - K$. *Das Monom* u' *nennen wir auch* kleinstes gemeinsames Vielfaches *der Monome* u_1 *und* u_2 *und schreiben* $u' = kgV(u_1, u_2)$.

Bezeichnung 1.4.6 *Allgemein wollen wir für zwei Monome* u, $D_J u$ *das Monom* $D_J u$ *ein* Vielfaches *von* u *und* u *einen* Teiler *von* $D_J u$ *nennen. Wir schreiben dafür auch* $u | D_J u$.

Bemerkung 1.4.12 *Durch* $kgV(u_1, u_2, \ldots, u_r) \stackrel{def}{=} kgV(kgV(u_1, \ldots, u_{r-1}), u_r)$ *läßt sich ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von* r *Monomen* $u_i = D_{J_i} u^\nu$ *definieren.*

Definition 1.4.6 *Seien* $e_1 = \alpha u_1 + v_1$ *und* $e_2 = \beta u_2 + v_2$ *zwei lpdgl mit den Leitmonomen* u_1 *und* u_2. v_1 *bzw.* v_2 *seien frei von* u_1 *bzw.* u_2.

Die Monome u_1 *und* u_2 *seien von der in Definition 1.4.5 diskutierten Art.*

Wir definieren nun unter Benutzung der Bezeichnungen aus Definition 1.4.5:

$$igb_1(e_1, e_2) \stackrel{def}{=} D_{J_1}(e_1/\alpha) - D_{K_1}(e_2/\beta) = D_{J_1}(v_1/\alpha) - D_{K_1}(v_2/\beta) \tag{1.55}$$

$$igb_2(e_1, e_2) \stackrel{def}{=} \beta D_{J_1} e_1 - \alpha D_{K_1} e_2 \tag{1.56}$$

und nennen diese Bildungen Integrabilitätsbedingung erster Art *und* Integrabilitätsbedingung zweiter Art.

Mit $ligb(e_1, e_2)$ *bezeichnen wir* $kgV(u_1, u_2)$.

Bemerkung 1.4.13 *Beide Integrabilitätsbedingungen enthalten nur Monome, die kleiner als* $u' = D_S u^\nu$ *sind.*

Bemerkung 1.4.14 *Wir definieren Integrabilitätsbedingungen* $igb_1(e_1, e_2)$ *oder* $igb_2(e_1, e_2)$ *nur für* e_i *mit* $lmon(e_i) \neq \mathbf{1}$ *also für lpdgl, die von der konstanten lpdgl* $e = -\beta$ *verschieden sind.*

Für die Einführung zweier Arten von Integrabiltätsbedingungen gilt das oben über die Einführung zweier Arten von Reduktionen gesagte.

Lemma 1.4.10 *Sei* F *ein System von lpdgl,* $e_1, e_2 \in F$ *zwei lpdgl mit Leitmonomen* u_1, u_2 *für die* $kgV(u_1, u_2) = u$ *existiere. Ferner seien alle* e *mit* $e < u$ *Konfluenzanfangspunkte für* $\xrightarrow{F}$.

Dann existieren lpdgl $w' \cong w$ *mit*

$$\begin{array}{ccc} igb_1(e_1, e_2) & & igb_2(e_1, e_2) \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle F}\big\downarrow \\ {\scriptstyle *}\, w' & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & {\scriptstyle *}\, w \end{array} \tag{1.57}$$

Beweis. Sei $e_1 = \alpha u_1 + v_1$, $e_2 = \beta u_2 + v_2$, v_1 frei von u_1, v_2 frei von u_2. Weiter sei $D_{J_1} u_1 = D_{J_2} u_2 = D_S u^\nu$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{igb}_2(e_1,e_2) &= \beta D_{J_1} e_1 - \alpha D_{J_2} e_2 \\ &= \beta D_{J_1}(\alpha u_1) + \beta D_{J_1} v_1 - \alpha D_{J_2}(\beta u_2) - \alpha D_{J_2} v_2\end{aligned} \tag{1.58}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\beta D_{J_1}(\alpha u_1) - \alpha D_{J_2}(\beta u_2) &= s_1 - s_2 \text{ mit} \\ s_1 &= \beta \sum_{\substack{E+F=J_1 \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\alpha) D_F(u_1) \\ s_2 &= \alpha \sum_{\substack{K+L=J_2 \\ K>0}} c_{K,L} D_K(\beta) D_L(u_2)\end{aligned} \tag{1.59}$$

und also

$$\begin{aligned}\mathrm{igb}_2(e_1,e_2) &= s_1 - s_2 + \beta D_{J_1}(v_1) - \alpha D_{J_2}(v_2) \\ &= s_1 - s_2 + r \quad \text{mit} \\ r &= \beta D_{J_1}(v_1) - \alpha D_{J_2}(v_2)\end{aligned} \tag{1.60}$$

Wie in Lemma 1.4.9 schließen wir nun auf die Existenz der Reduktionsketten

$$s_1 \xrightarrow{e_1 *} -\beta \sum_{\substack{E+F=J_1 \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\alpha) D_F(v_1/\alpha) = s_1' \tag{1.61}$$

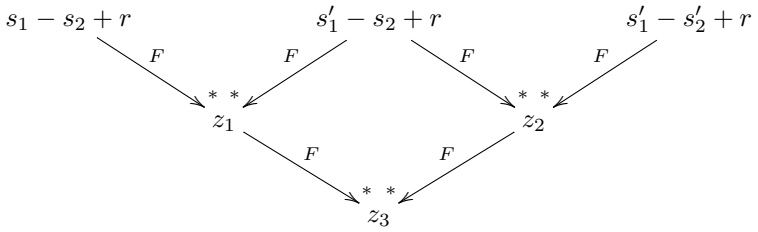
$$s_2 \xrightarrow{e_2 *} -\alpha \sum_{\substack{K+L=J_2 \\ K>0}} c_{K,L} D_K(\beta) D_L(v_2/\beta) = s_2' \tag{1.62}$$

Sie entstehen durch der Ordnung $<$ nach von unten her beginnende Reduktionen der $D_F(u_1)$ mit e_1 zu $-D_F(v_1/\alpha)$ und der $D_L(u_2)$ mit e_2 zu $-D_L(v_2/\beta)$.

Bezeichnet man die Glieder der Reduktionskette (1.61) mit p_i und die der Reduktionskette (1.62) mit q_i, so ist leicht ersichtlich, daß alle $p_i - s_2 + r < u$ und alle $-q_i + s_1' + r < u$ sind, weil sie nämlich u nicht, sondern nur kleinere Monome enthalten. Sie sind also alle Konfluenzanfangspunkte von $\xrightarrow{F}$.

Wie in Lemma 1.4.9 schliessen wir nun mit Lemma 1.4.3 auf $s_1 - s_2 + r \downarrow s_1' - s_2 + r$ und $-s_2 + s_1' + r \downarrow -s_2' + s_1' + r$ und weiter auf $s_1 - s_2 + r \downarrow s_1' - s_2' + r$.

Im Bild



(1.63)

Wir rechnen nun aus:

$$\begin{aligned}s_1' - s_2' + r &= -\beta \sum_{\substack{E+F=J_1 \\ E>0}} c_{E,F} D_E(\alpha) D_F(v_1/\alpha) \\ &\quad + \alpha \sum_{\substack{K+L=J_2 \\ K>0}} c_{K,L} D_K(\beta) D_L(v_2/\beta) + r \\ &= -\beta \left(D_{J_1}(\alpha\, v_1/\alpha) - \alpha D_{J_1}(v_1/\alpha)\right) + \alpha \left(D_{J_2}(\beta\, v_2/\beta) - \beta D_{J_2}(v_2/\beta)\right) \\ &\quad + \beta D_{J_1}(v_1) - \alpha D_{J_2}(v_2) \\ &= \alpha\beta \left(D_{J_1}(v_1/\alpha) - D_{J_2}(v_2/\beta)\right) \\ &= \alpha\beta\, \mathrm{igb}_1(e_1,e_2)\end{aligned} \tag{1.64}$$

Aus (1.60), (1.63) und (1.64) folgt also

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{igb}_2(e_1,e_2) = s_1 - s_2 + r & & & & s_1' - s_2' + r \xrightarrow{\cong} \mathrm{igb}_1(e_1,e_2) \\ & \overset{F}{\searrow} & & \overset{F}{\swarrow} & \\ & & {}^{*}z^{*} & & \end{array} \tag{1.65}$$

oder eben

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{igb}_2(e_1,e_2) & & \mathrm{igb}_1(e_1,e_2) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ {}^{*}z & \xrightarrow{\cong} & {}^{*}z' \end{array} \tag{1.66}$$

■

Definition 1.4.7 *Sei $e_1 = u_1 + v_1, e_2 = u_2 + v_2, \ldots, e_r = u_r + v_r$ eine Folge von lpdgl mit Leitmonomen u_i und v_i frei von u_i. Es sei $u_i = D_{J_i} u^\nu$ für $1 \le i \le r$ und es gelte $kgV(u_i, u_{i+1}) \,|\, kgV(u_1, u_r)$ für $0 < i < r$.*

Dann heiße $e_1, e_2, \ldots, e_r$ eine Darstellungskette *für e_1, e_r.*

Lemma 1.4.11 *Es sei $e_1, e_2, \ldots, e_r$ eine Darstellungskette. In den Bezeichnungen von Definition 1.4.7 sei $D_S u^\nu = kgV(u_1, u_r)$, $D_{S_i} u^\nu \overset{def}{=} kgV(u_i, u_{i+1})$ und $K_i \overset{def}{=} S - S_i$ für $0 < i < r$.*

Dann gilt

$$igb_1(e_1, e_r) = \sum_{0<i<r} D_{K_i} igb_1(e_i, e_{i+1}) \tag{1.67}$$

Beweis. Es sei $E_i = S_i - J_i$ und $F_i = S_i - J_{i+1}$ für $0 < i < r$. Dann ist $\mathrm{igb}_1(e_i, e_{i+1}) = D_{E_i} v_i - D_{F_i} v_{i+1}$ und

$$D_{K_i} \mathrm{igb}_1(e_i, e_{i+1}) = D_{S-J_i} v_i - D_{S-J_{i+1}} v_{i+1} \tag{1.68}$$

Also auch

$$\begin{aligned} \sum_{0<i<r} D_{K_i} \mathrm{igb}_1(e_i, e_{i+1}) &= D_{S-J_1} v_1 - D_{S-J_r} v_r \\ &= \mathrm{igb}_1(e_1, e_r) \end{aligned} \tag{1.69}$$

Die Annahme, daß die Leitkoeffizienten der e_i gleich 1 sind, stellt aufgrund der Definition der Integrabilitätsbedingungen erster Art keine Einschränkung dar.

■

Satz 1.4.3 *Sei F eine Menge von lpdgl. Für jedes Paar $f_1, f_2 \in F$ für das $igb_2(f_1, f_2)$ definiert ist, existiere eine Darstellungskette $e_1, e_2, \ldots, e_r$ mit $f_1 = e_1$ und $f_2 = e_r$ mit $igb_2(e_i, e_{i+1}) \overset{r_2}{\xrightarrow{F^*}} 0$ für $0 < i < r$.*

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} & e & \\ \overset{F}{\swarrow} & & \overset{F}{\searrow} \\ {}^{*}e_1 & & {}^{*}e_2 \end{array} \Rightarrow e_1 \downarrow e_2 \tag{1.70}$$

das heißt $\xrightarrow{F}$ ist konfluent.

Für zwei lpdgl e, e_1 mit $e \overset{r_2}{\xrightarrow{F^*}} e_1$ existieren $w \cong w'$, mit

$$\begin{array}{ccccc} & & e & \overset{r_2}{} & \\ & \overset{F}{\swarrow} & & \overset{F}{\searrow} & \\ {}^{*}w' & \xrightarrow{\cong} & w & \xleftarrow{F^*} & {}^{*}e_1 \end{array} \tag{1.71}$$

Für alle Paare $e_1, e_2 \in F$, für die $igb_1(e_1, e_2)$ definiert ist, gilt

$$igb_1(e_1, e_2) \xrightarrow{F}{}^{*} 0 \tag{1.72}$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion. Es sei — wie schon in diesem ganzen Abschnitt zugrundegelegt — $(\mathcal{M}, <)$ die wohlgeordnete Menge der Differentialmonome u_J^k mit der Ordnungsrelation $<$ und $\mathcal{P} = P_{\text{finite}}(\mathcal{M})$ mit der in Definition 1.4.2 eingeführten Ordnung, die wir ebenfalls mit $<$ bezeichnen.

Für den Fall inhomogener lpdgl ist $\mathcal{M} = \{u_J^k\} \cup \mathbf{1} \cup \mathbf{0}$.

Es sei $N \in \mathcal{P}$ und für alle $M \in \mathcal{P}$ mit $M < N$ sei (1.70) und (1.71) richtig, falls $e \leq M$ ist, Aussage (1.72) sei richtig für $\text{ligb}(e_1, e_2) \leq M$. Wir werden nun zeigen, daß diese Aussagen dann auch für $e \leq N$ bzw. $\text{ligb}(e_1, e_2) \leq N$ gültig sind.

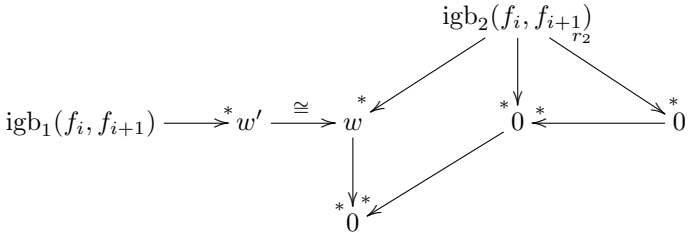
Im Fall inhomogener lpdgl ist als Basis $N = \mathbf{1}$ in Betracht zu ziehen. Offensichtlich sind dann (1.70) und (1.71) richtig, falls $e \leq N$ ist und ebenfalls Aussage (1.72) für die (leere) Menge der $\text{ligb}(e_1, e_2) \leq N$.

Wir beginnen mit Aussage (1.72).

Es seien $e_1, e_2 \in F$ mit $\text{ligb}(e_1, e_2) = u \leq N$ und der Darstellungskette $e_1 = f_1, f_2, \ldots, f_r = e_2$ mit $\text{igb}_2(f_i, f_{i+1}) \overset{r_2}{\xrightarrow{F}{}^{*}} 0$. Dann gilt nach Lemma 1.4.11:

$$\text{igb}_1(e_1, e_2) = \sum_{0<i<r} D_{K_i} \text{igb}_1(f_i, f_{i+1}) \tag{1.73}$$

Zunächst leiten wir nun $\text{igb}_1(f_i, f_{i+1}) \xrightarrow{F}{}^{*} 0$ gemäß folgendem Diagramm ab:



(1.74)

Man beachte zunächst $u_i \overset{\text{def}}{=} \text{ligb}(f_i, f_{i+1}) \,|\, \text{ligb}(e_1, e_2) = u$ also $u_i \leq u \leq N$. Die Existenz von $w \cong w'$ folgt aus Lemma 1.4.10, denn alle $e < u_i \leq u \leq N$ sind nach Induktionsannahme Konfluenzanfangspunkte. Das Dreieck rechts ergibt sich durch Anwendung von (1.71), was wegen $\text{igb}_2(f_i, f_{i+1}) < u_i \leq u \leq N$ kraft Induktion möglich ist. Die in (1.71) auftauchende $w \cong w'$ sind dabei gleich 0. Das mittlere Parallelogramm entsteht schließlich, weil $\text{igb}_2(f_i, f_{i+1}) < u_i \leq u \leq N$ nach (1.70) und Induktion Konfluenzanfangspunkt ist.

Als nächtes folgern wir $D_{K_i} igb_1(f_i, f_{i+1}) \xrightarrow{F}{}^{*} 0$. Wir betrachten dazu die nach $<$ geordnete Kette der Monome

$$u_i = D_{J_0} u_i < \cdots < D_{J_\nu} u_i \cdots < D_{J_s} u_i = D_{K_i} u_i = u \tag{1.75}$$

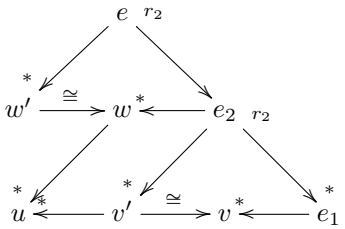
Da für eine lpdgl e und ein Monom v aus $e < v$ auch $\partial e < \partial v$ folgt, ist $D_{J_\nu} igb_1(f_i, f_{i+1}) < D_{J_\nu} u_i \leq u \leq N$. Weiter ist $D_{J_{\nu+1}} = \partial_{x^{i_\nu}} D_{J_\nu}$, so daß die Voraussetzungen für einen Induktionsschluß gemäß Lemma 1.4.7 gegeben sind. Das dort genannte u kann dabei mit dem hier verwendeten $u = \text{ligb}(e_1, e_2)$ gleichgesetzt werden, das dortige e_2 ist gleich 0.

Schließlich ziehen wir noch Lemma 1.4.4 heran, um aus $D_{K_i} igb_1(f_i, f_{i+1}) \xrightarrow{F}{}^{*} 0$

$$\sum_{0<i<r} D_{K_i} igb_1(f_i, f_{i+1}) \xrightarrow{F}{}^{*} 0 \tag{1.76}$$

zu erhalten. Das dort genannte u kann mit dem hier gebrauchten gleichgesetzt werden, da alle $e < u \leq N$ wegen Induktion und (1.70) Konfluenzanfangspunkte sind. Ebenso sind die $D_{K_i} igb_1(f_i, f_{i+1}) < D_{K_i} u_i = u \leq N$.

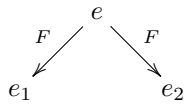
Damit ist Aussage (1.72) auch für $M = N$ bewiesen und wir gehen zu Aussage (1.71) für $e \leq N$ über. Falls $e < N$ oder $e \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{F*} e_1$ gar keine echte Reduktion enthält, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, daß $\mathrm{supp}(e) = N$ und eine echte Reduktion in $e \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{F*} e_1$ vorkommt. Der Beweis ergibt sich dann aus dem Diagramm



(1.77)

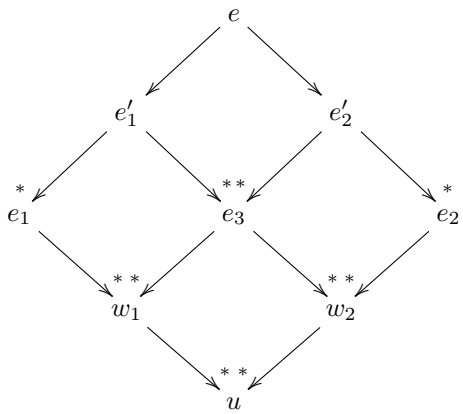
Es ist dann nämlich nach Induktion und (1.70) jedes $e' < e$ Konfluenzanfangspunkt, so daß die $w \cong w'$ im oberen Dreieck nach Lemma 1.4.9 konstruiert werden können. Das untere Dreieck folgt dann kraft Induktion aus (1.71), da ja $e_2 < e = N$. Damit ist e_2 auch nach (1.70) und Induktion Konfluenzanfangspunkt und das Parallelogramm kann mit u geschlossen werden. Beachtet man $k \xrightarrow{F} k' \Leftrightarrow \alpha k \xrightarrow{F} \alpha k'$, so ist (1.71) auch für $\mathrm{supp}(e) = N$ gezeigt.

Um (1.70) für $e \leq N$ zu zeigen, genügt es für ein solches e



$$\Rightarrow e_1 \downarrow e_2 \tag{1.78}$$

herzuleiten. Man kann nämlich in (1.70) annehmen, daß die Reduktionen $e \xrightarrow{F*} e_1$ und $e \xrightarrow{F*} e_2$ beide wenigstens eine echte Reduktion enthalten, da ansonsten die Behauptung trivial erfüllt ist. Dann kann aber ein Diagramm



(1.79)

konstruiert werden, in dem $e'_1, e'_2 < e$ sind. Da wir für den Augenblick annehmen wollen, daß (1.78) schon für alle $e \leq N$ bewiesen sei, existiert e_3 im obigen Diagramm. Weiter sind $e'_1, e'_2, e_3 < e \leq N$ Konfluenzanfangspunkte kraft Induktion und (1.70), so daß das Diagramm komplettiert werden kann.

Es bleibt also (1.78) für $e \leq N$ zu zeigen. Falls $e \xrightarrow{F} e_1$ ein Monom u_1 von e und $e \xrightarrow{F} e_2$ ein *anderes* Monom u_2 von e reduziert, dann folgt (1.78) ohne weiteres aus Lemma 1.4.8.

Der Fall inhomogener lpdgl kann hier extra behandelt werden, insofern lediglich die Reduktionen $e \xrightarrow{F} e_i$ an einem eventuell in e vorkommenden konstanten Glied einen Spezialfall bilden. Diese führen aber beide lediglich zur Eliminierung dieses konstanten Gliedes, also zum selben Ergebnis.

Wir nehmen also an, daß $e = \alpha D_J u + w$ mit einem Monom $u = u^\nu$ und w frei von $D_J u$. Die Reduktionen $e \xrightarrow{F} e_1$ bzw. $e \xrightarrow{F} e_2$ werden vermittelt durch $f_1 = \beta_1 D_K u - v_1$ bzw. $f_2 = \beta_2 D_L u - v_2$ mit den Leitmonomen $D_K u$ bzw. $D_L u$. v_1 bzw. v_2 seien frei von $D_K u$ bzw. $D_L u$. Weiter sei $S = K \vee L$, $K_1 = S - K$, $L_1 = S - L$ und $J_1 = J - S$, was wegen $D_K u \,|\, D_J u$ und $D_L u \,|\, D_J u$ wohldefiniert ist. Es ist also $D_J = D_{J_1} D_{K_1} D_K$ und $D_J = D_{J_1} D_{L_1} D_L$.

Dann ist

$$e_1 = \alpha D_{J_1} D_{K_1}(v_1/\beta_1) + w \tag{1.80}$$

$$e_2 = \alpha D_{J_1} D_{L_1}(v_2/\beta_2) + w \tag{1.81}$$

also

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \alpha D_{J_1}\left(D_{K_1}(v_1/\beta_1) - D_{L_1}(v_2/\beta_2)\right) \qquad (1.82)\\ &= \alpha D_{J_1} igb_1(f_1, f_2) \end{aligned}$$

$$(1.83)$$

Das Monom $D_S u$ ist $\mathrm{ligb}(f_1, f_2)$, also ist wegen $S + J_1 = J$ auch $\mathrm{ligb}(f_1, f_2) \le D_J u$. Da $e \le N$ ist auch $D_J u \le N$, also zusammen $\mathrm{ligb}(f_1, f_2) \le N$. Nach dem oben schon vollzogenen Induktionsschluß können wir also $\mathrm{igb}_1(f_1, f_2) \xrightarrow{F^*} 0$ annehmen.

Wir bilden nun wieder eine nach $<$ geordnete Monomkette

$$D_S u = D_{P_0} D_S u < \cdots D_{P_\nu} D_S u < \cdots < D_{P_s} D_S u = D_{J_1} D_S u = D_J u \tag{1.84}$$

und schließen aus $D_{P_\nu} D_S u \le D_J u \le N$ und $D_{P_\nu} \mathrm{igb}_1(f_1, f_2) < D_{P_\nu} D_S u \le N$ sowie Lemma 1.4.7 auf $D_{J_1} \mathrm{igb}_1(f_1, f_2) \xrightarrow{F^*} 0$. Das u in Lemma 1.4.7 ist dabei unser $D_J u$.

Wir kürzen $D_{J_1} \mathrm{igb}_1(f_1, f_2)$ mit p ab und bezeichnen die Glieder in der Reduktionskette $\alpha p \xrightarrow{F^*} 0$ mit q_i. Dann sind alle $q_i + e_2$ Konfluenzanfangspunkte. Sie enthalten nämlich alle das Monom $D_J u$ nicht, da es in e_2 wegen der Reduktion von e mit f_2 an $D_J u$ fehlt, und auch in $\alpha D_{J_1} \mathrm{igb}_1(f_1, f_2) < D_J u$ und seinen Reduktionen q_i nicht vorkommt. In den Monomen $> D_J u$ stimmen e und $e_2 + q_i$ aber überein, so daß $q_i + e_2 < e \le N$ gilt, und die $q_i + e_2$ kraft Induktion Konfluenzanfangspunkte sind. Damit ist nach Lemma 1.4.3 $\alpha p + e_2 \downarrow e_2$ also $e_1 \downarrow e_2$.

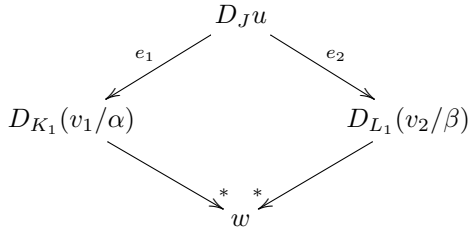
Das war aber die noch zu zeigende Behauptung. ■

Bemerkung 1.4.15 *Die Bedingung* $igb_2(e_i, e_{i+1}) \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{F^*} 0$ *im vorigen Satz kann äquivalent durch* $igb_2(e_i, e_{i+1}) \xrightarrow{F^*} 0$, $igb_1(e_i, e_{i+1}) \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{F^*} 0$ *oder* $igb_1(e_i, e_{i+1}) \xrightarrow{F^*} 0$ *ersetzt werden.*

Satz 1.4.4 *Sei F eine Menge von lpdgl und $\xrightarrow{F}$ konfluent. Dann gilt $igb_1(e_1, e_2) \xrightarrow{F^*} 0$ für alle $e_1, e_2 \in F$ für die $igb_1(e_1, e_2)$ definiert ist.*

Beweis. Sei $e_1 = \alpha D_K u - v_1$, $e_2 = \beta D_L u - v_2$, $u = u^\nu$, $J = K \vee L$, $K_1 = J - K$, $L_1 = J - L$. Dann sind die Reduktion von $D_J u$ mit e_1 bzw. e_2 gleich $D_{K_1}(v_1/\alpha)$

bzw. $D_{L_1}(v_2/\beta)$. Wegen Konfluenz von $\xrightarrow{F}$ existiert das Diagramm



(1.85)

so daß $-D_{K_1}(v_1/\alpha) \xrightarrow{*} -w$ und $D_{L_1}(v_2/\beta) \xrightarrow{*} w$. Aus Lemma 1.4.4 folgt dann $-D_{K_1}(v_1/\alpha) + D_{L_1}(v_2/\beta) \downarrow 0$, also $igb_1(e_1, e_2) = -D_{K_1}(v_1/\alpha) + D_{L_1}(v_2/\beta) \xrightarrow{F*} 0$. ■

Definition 1.4.8 *Ein System E von lpdgl, das die nach Satz 1.4.3 und Satz 1.4.4, äquivalenten Voraussetzungen dieser beiden Sätze erfüllt, heiße* passiv, vollständig, vollständig integrabel *oder auch* involutiv.

Lemma 1.4.12 *Seien e_1, e_2 zwei lpdgl für die $igb_1(e_1, e_2)$ existiert. Dann ist*

$$igb_1(e_1, e_2), igb_2(e_1, e_2) \in (e_1, e_2)$$

Beweis. Folgt direkt aus Definition 1.4.6. ■

Lemma 1.4.13 *Sei F ein System von lpdgl, (F) das zugehörige Differentialideal. Dann gilt fü beliebige e, e': $e \xrightarrow{F*} e' \Rightarrow e - e' \in (F)$.*

Beweis. Nach Definition 1.4.3 gilt direkt $e - e' \in (F)$ für $e \xrightarrow{F} e'$. Die Behauptung folgt dann durch Induktion und $e, e' \in (F) \Rightarrow e + e' \in (F)$. ■

Korollar 1.4.2 *Für ein System F von lpdgl gilt $e \xrightarrow{F*} 0 \Rightarrow e \in (F)$.*

Satz 1.4.5 *Sei E ein System von lpdgl, (E) das zugehörige Differentialideal. Dann ist E passiv genau dann wenn $e \xrightarrow{E*} 0$ für alle $e \in (E)$.*

Beweis. Es sei E passiv und $e \in (E)$, also $e = \sum a_{iJ} D_J e_i$, $e_i \in E$. Dann gilt $e \xrightarrow{E*} 0$ wegen $e_i \xrightarrow{e_i} 0$ und Lemma 1.4.7 sowie Lemma 1.4.4. Umgekehrt folgt aus $e \xrightarrow{E*} 0$ für $e \in (E)$ auch $\mathrm{igb}_1(e_1, e_2) \xrightarrow{E*} 0$ für $e_1, e_2 \in E$ wegen Lemma 1.4.12, so daß E passiv ist. ■

Korollar 1.4.3 *Es sei E ein passives System von lpdgl. Dann ist $e \in (E)$ genau dann, wenn $e \xrightarrow{E*} 0$*

Beweis. Korollar 1.4.2 und Satz 1.4.5. ■

Korollar 1.4.4 *Sei E ein passives System von lpdgl, E' ein zweites mit $E \subseteq E' \subseteq (E)$. Dann ist auch E' passiv.*

Beweis. Alle $\mathrm{igb}_1(e_1, e_2)$ mit $e_1, e_2 \in E'$ sind nach Lemma 1.4.12 in (E) und reduzieren nach Satz 1.4.5 sogar schon mit E zu 0. ■

Passive Systeme bleiben also passiv, wenn sie mit Elementen aus dem von ihnen erzeugten Ideal erweitert werden. Im folgenden untersuchen wir, ob ein passives System auch passiv bleibt, wenn man ein Element eines solchen Systems durch seine Reduktion mit einem anderen Element ersetzt. Es erweist sich als zweckmäßig dafür einige Begriffe einzuführen.

Definition 1.4.9 *Eine Menge E von Monomen u^i_J (oder im Fall inhomogener lpdgl: u^i_J, $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$) die mit jedem $u \in E$ auch alle $\partial_{x_i} u$ enthält , heiße* Monomideal *oder* monomiales Ideal.

Lemma 1.4.14 *Es sei E eine beliebige Menge von Monomen. Die Menge M aus allen $D_J u$ für $u \in E$ ist ein Monomideal und heißt* das von E erzeugte Monomideal.

Beweis. Klar. ■

Satz 1.4.6 *Es sei*

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots \tag{1.86}$$

eine aufsteigende Kette von Monomidealen E_i aus Monomen u^ν_J, $\nu = 1, \dots, n$. Dann wird E_i stationär, das heißt $E_i = E_{i+1}$ für alle $i \geq i_0$.

Beweis. Falls $n = 1$ ist die Behauptung identisch mit dem sogenannten Lemma von Dickson [4, 2.4, Theorem 5]. Für $n > 1$ bilden für ein bestimmtes ν die Teilmengen E^ν_i der E_i, die nur aus Monomen $u^\nu_J \in E_i$ bestehen, ebenfalls aufsteigende Idealketten, die gemäß dem abgehandelten Fall $n = 1$ einzeln stationär werden. Also wird auch E_i stationär. ■

Definition 1.4.10 *Es sei F ein System von lpdgl. Das Monomideal $M = M_F$ das von den $lmon(f)$, $f \in F$, erzeugt wird heiße* Leitmonomideal von F.

Lemma 1.4.15 *Es sei $F = (F)$ ein Ideal von lpdgl, $M = M_{(F)}$, sein Leitmonomideal, $u \in M$ ein Monom. Dann existiert ein $f \in F$ mit $lmon(f) = u$.*

Beweis. M besteht aus allen $D_J u$, wobei u das Leitmonom eines $f \in (F)$ ist. $D_J u$ ist aber auch das Leitmonom von $D_J f \in (F)$. ■

Lemma 1.4.16 *Es sei F ein System von lpdgl, $f, f' \in F$ und f_1 eine Reduktion erster oder zweiter Art von f mit f'. Es sei $F_1 = F \setminus \{f\} \cup \{f_1\}$, entstehe also, indem ein $f \in F$ mit seiner Reduktion durch ein anderes $f' \in F$ ersetzt wird. Dann ist das Leitmonomideal M_F von F gleich dem Leitmonomideal M_{F_1} von F_1 und es ist $(F) = (F_1)$.*

Beweis. Reduziert f' ein Monom von f, das nicht das Leitmonom von f ist, so ändert sich die Erzeugungsmenge von M_F nicht. Reduziert f' das Leitmonom, so ist der Wegfall des Leitmonoms von f aus der Erzeugungsmenge unerheblich, da es ohnehin durch (eventuell nullfache) Differentiation aus dem Leitmonom von f' gebildet werden kann. Die Gleichheit $(F) = (F_1)$ folgt, da f bzw. f_1 nach Definition 1.4.3. im jeweils anderen Ideal mitenthalten sind. ■

Satz 1.4.7 *Ein System F von lpdgl ist genau dann passiv, wenn das Leitmonomideal M_F von F mit dem Leitmonomideal $M_{(F)}$ des Ideals (F) übereinstimmt.*

Beweis. Es sei F passiv, $u \in M_{(F)}$. Dann existiert nach Lemma 1.4.15 ein $f \in (F)$ mit Leitmonom u. Da F passiv, gilt $f \xrightarrow{F*} 0$. In dieser Reduktionskette muß irgendwann auch das Leitmonom u von f von einem $f' \in F$ reduziert werden. Damit ist u ein Vielfaches des Leitmonoms von f' und somit in M_F.

Sei umgekehrt $M_F = M_{(F)}$ und $f \in (F)$ beliebig, $f \neq 0$. Da das Leitmonom u von f in M_F liegt, ist es Vielfaches eines Leitmonoms v von $f' \in F$. f kann also mit f' an u zu einem neuen $f_1 \in (F)$ reduziert werden. Dieser Schluß kann fortgesetzt werden solange $f_1 \neq 0$ gilt. Da die Reduktionskette aber irgendwann abbrechen muß, wird das Ergebnis der Reduktion irgendwann gleich 0 sein. Damit ist $f \xrightarrow{F*} 0$ nachgewiesen und nach Satz 1.4.5 F passiv. ■

Dieser Satz erlaubt uns nun das gewünschte Ergebnis auf einfache Weise abzuleiten:

Satz 1.4.8 *Es sei F ein System von lpdgl. Das System F_1 entstehe aus F indem ein $f \in F$ durch seine Reduktion (erster oder zweiter Art) mit einem anderen $f' \in F$ ersetzt werde. Dann ist F passiv genau dann wenn F_1 passiv ist.*

Beweis. Lemma 1.4.16 und Satz 1.4.7. ■

Wir machen von den Monomidealen noch eine zweite Anwendung, die für den nächsten Abschnitt benötigt wird:

Lemma 1.4.17 *Es sei*

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots \tag{1.87}$$

eine Kette von Systemen von lpdgl, von denen F_{i+1} aus F_i durch Hinzunahme einer Menge S_i von lpdgl entstehe, deren Elemente alle reduziert bezüglich F_i seien. Dann bricht die Kette ab.

Beweis. Die Leitmonome der Elemente von S_i gehören nicht zum Leitmonomideal von F_i. Das Leitmonomideal von F_{i+1} ist also echt größer als das von F_i. Nach Satz 1.4.6 muß die Kette abbrechen. ■

Auch die folgenden Begriffe werden im nächsten Abschnitt gebraucht:

Definition 1.4.11 *Ein System E von lpdgl heißt* autoreduziert, *wenn für alle $e, e' \in E$, $e \neq e'$, e reduziert bezüglich e', also e reduziert bezüglich $E \setminus \{e\}$ ist.*

Satz 1.4.9 *Seien E, F zwei passive, autoreduzierte Systeme von lpdgl mit $(E) = (F)$. Es sei $|E|, |F| < \infty$ und alle lpdgl in E, F seien normiert. Dann ist $E = F$.*

Beweis. Seien $e_1, \ldots, e_r$ die Elemente von E, $f_1, \ldots, f_s$ die Elemente von F. Sie seien so geordnet, daß $\mathrm{lmon}(e_i) < \mathrm{lmon}(e_{i+1})$ und $\mathrm{lmon}(f_i) < \mathrm{lmon}(f_{i+1})$ ist. Per Induktion können wir annehmen, daß für ein bestimmtes j gilt: $r, s \geq j-1$, $e_i = f_i$ für $i \leq j-1$.

Enthalten sowohl E wie F nur $j-1$ Elemente, ist der Beweis schon erbracht, so daß wir im folgenden $r \geq j$ oder $s \geq j$ annehmen.

Enthält nun E ein e_j, so wird dieses wegen $e_j \in E \subseteq (E) = (F)$ und Satz 1.4.5 von F reduziert. Enthielte F jetzt nur die Elemente $f_1 = e_1, \ldots, f_{j-1} = e_{j-1}$, gäbe es Elemente in E die e_j reduzieren. Dies widerspricht aber der Autoreduziertheit von E. Also ist $r \geq j \Rightarrow s \geq j$, und mit einem symmetrischen Schluß auch $s \geq j \Rightarrow r \geq j$. Zusammen also $r, s \geq j$ wenn nicht $r, s < j$.

Es sei $\mathrm{lmon}(e_j) < \mathrm{lmon}(f_j)$. Dann kann e_j nicht von F reduziert werden, denn die $f_i = e_i$ mit $i < j$ reduzieren e_j nicht, da E autoreduziert ist. Die f_i mit $i \geq j$ können e_j aber auch nicht reduzieren, da für sie $\mathrm{lmon}(f_i) > \mathrm{lmon}(e_j)$ gilt. Da aber jedes $e \in E$ von F reduziert wird, ist $\mathrm{lmon}(e_j) \geq \mathrm{lmon}(f_j)$ und im Umkehrschluß sogar $\mathrm{lmon}(e_j) = \mathrm{lmon}(f_j)$.

Betrachte nun die Reduktion $f_j \xrightarrow{e_j} z$ von f_j an seinem Leitmonom. Dann ist $z \xrightarrow{F^*} 0$ und $z = f_j - e_j$ frei vom gemeinsamen Leitmonom von e_j und f_j. Daraus folgt aber schon $z = 0$, denn andernfalls würde ein $f_i = e_i$ mit $i < j$ z reduzieren. z enthält aber nur Monome aus f_j und e_j, so daß dann entweder f_j oder e_j von $f_i = e_i$ reduziert werden könnten, obwohl E und F autoreduziert sind. Also ist $z = 0$ und $e_j = f_j$. Damit ist der Induktionsschluß komplett und der Beweis erbracht. ■

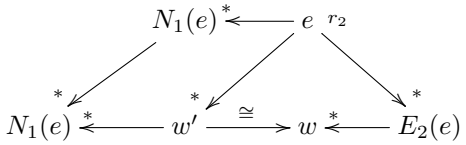
Sei F ein System von lpdgl, e eine beliebige lpdgl. Wir können dann immer eine Kette von Reduktionen erster oder zweiter Art bilden, die mit e anfängt und nach endlich vielen Schritten mit einem e' abbricht, das bezüglich F reduziert ist. Wir geben einem solchen e' einen besonderen Namen:

Definition 1.4.12 *Es sei F ein System von lpdgl, e, e' zwei lpdgl mit $e \xrightarrow{F^*} e'$ bzw. $e \overset{r_2}{\xrightarrow{F^*}} e'$ und e' reduziert bezüglich F. Dann nennen wir e' eine* Endform *von e für F bezüglich Reduktionen erster Art bzw. bezüglich Reduktionen zweiter Art. Wir schreiben auch $e' = E_1(e)$ bzw. $e' = E_2(e)$.*

Eine Endform einer lpdgl e für ein beliebiges System E ist nicht notwendig eindeutig bestimmt. Es gilt aber

Bemerkung 1.4.16 *Sei F passiv, e, e_1, e_2 drei lpdgl, e_1, e_2 Endformen von e bezüglich Reduktionen erster Art. Dann ist $e_1 = e_2$, denn es ist $e_1 \downarrow e_2$ und e_1, e_2 sind nicht weiter reduzierbar. Wir schreiben $e_1 = e_2 = N_1(e)$.*

Aus folgendem Diagramm entnimmt man nun, daß für F passiv eine Endform $E_2(e)$ bezüglich Reduktionen zweiter Art stets mit der eindeutig bestimmten Endform $N_1(e)$ bis auf einen Faktor übereinstimmt, also $E_2(e) \cong N_1(e)$ gilt.



(1.88)

Eine normierte Endform $E_2(e)$ ist also eine Normalform $N_2(e)$.

Die Bildung der Normalform $N_1(e)$ für passive F ist eine lineare Operation:

Lemma 1.4.18 *Es sei F passiv, e, e' zwei lpdgl. Dann ist $N_1(e + e') = N_1(e) + N_1(e')$ und $N_1(\alpha e) = \alpha N_1(e)$.*

Beweis. Aus $e \xrightarrow{F*} N_1(e)$ und $e' \xrightarrow{F*} N_1(e')$ folgt $e+e' \downarrow N_1(e)+N_1(e')$. Wir nennen den gemeinsamen Nachfolger z. Es ist $z = N_1(e) + N_1(e')$ da $N_1(e) + N_1(e')$ bereits reduziert ist. Also ist z eine Endform von $e + e'$ und somit $z = N_1(e + e')$. Die Multiplikativität mit α ist klar. ■

1.4.3 Janet–Basen

Definition 1.4.13 *Sei E ein System von lpdgl. Ein passives, autoreduziertes, normiertes System F von lpdgl mit $(E) = (F)$ heißt Janet–Basis von E, $F = \mathcal{J}(E)$.*

Zur Berechnung der Janet–Basis $\mathcal{J}(E)$ eines Systems E von lpdgl geben wir zunächst eine Reihe von Hilfsalgorithmen an.

Algorithmus 1.4.1 reduce(e, f)

e, f sind lpdgl, reduce(e, f) *berechnet ein e' mit $e \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{f*} \alpha e'$ für ein geeignetes $\alpha \neq 0$. e' ist reduziert bezüglich f.*

Der Algorithmus lautet

```
lmf := lmon(f)
lcf := lcoef(f)
do
   reduced := false
   mle := (m_{e_1}, ..., m_{e_k})          Liste der Monome von e mit m_{e_ν} < m_{e_{ν+1}}
   cle := (c_{e_1}, ..., c_{e_k})          Liste der entsprechenden Koeffizienten
   for i := 1 to k do
      if m_{e_i} = D_L lmf    für ein geeignetes L
        then
             e := e − c_{e_i}/lcf · D_L f
             reduced := true
      fi
   od
od until reduced = false  ∨  e = 0
return contentreduce(e)
```

Falls der Körper K, über dem e definiert ist Quotientenkörper eines ZPE-Ringes R ist, stehe contentreduce(e) *für einen Algorithmus, der e mit dem Hauptnenner seiner Koeffizienten durchmultipliziert und durch den größten gemeinsamen Faktor seiner dann in R liegenden Koeffizienten teilt. Andernfalls sei* contentreduce$(e) = e$.

Bemerkung 1.4.17 *Es gilt $(e, f) = (e', f)$ für $e' =$* reduce(e, f).

Algorithmus 1.4.2 reduce(e, E)

e ist eine lpdgl, E ein System von lpdgl. reduce(e, E) *berechnet eine lpdgl e' mit $e \overset{r_2}{\overset{E*}{\longrightarrow}} \alpha e'$ für ein geeignetes $\alpha \neq 0$. e' ist reduziert bezüglich E.*

sortiere E = $(e_1, \ldots, e_n)$ mit lmon$(e_i) \leq$ lmon(e_{i+1})
do
  reduced := false
  for i := 1 to n do
    e' := reduce(e, e_i)
    if e' $\neq$ e
      then
        e := e'
        reduced := true
        break
    fi
  od
od until reduced = false
return e

Bemerkung 1.4.18 *Es gilt $(e, E) = (e', E)$ für $e' =$* reduce(e, E).

Algorithmus 1.4.3 autored(E)

E ist ein System von lpdgl, autored(E) *berechnet ein autoreduziertes System E' mit $(E) = (E')$.*

do
  sortiere $E = (e_1, \ldots, e_n)$ mit lmon$(e_i) \leq$ lmon(e_{i+1})
  und $e_i \neq 0$
  i := 1
  while i < n do
    reduced := false
    for j := i + 1 to n do
      e' := reduce(e_j, e_i)
      if $e' \neq e_j$
        then
          $e_j := e'$
          reduced := true
          break
      fi
    od
    if reduced = true
      then
        break
      else
        i := i + 1
    fi

```
    od
od until i = n
return E
```

Bemerkung 1.4.19 $(E') = (E)$, *da* (E') *mit Elementaroperationen* reduce(e_j, e_i) *gewonnen wird, und Bemerkung 1.4.17 gilt.*

Algorithmus 1.4.4 igb(E)

Sei $E = (e_k)_{1 \le k \le N}$ *ein autoreduziertes System von lpdgl in den Funktionen* $u^1, \ldots, u^n$ *und* P *die Menge der Paare* (e_i, e_j) *für die* $igb_2(e_i, e_j)$ *definiert ist.*

Dann bestimmt igb(E) *eine Teilmenge* $P' \subseteq P$, *so daß für alle* $(e_i, e_j) \in P$ *eine Darstellungskette* $e_i = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r} = e_j$ *mit* $(e_{k_\nu}, e_{k_{\nu+1}}) \in P'$, $0 < \nu < r$, *existiert.*

igb(E)

```
igb(E) :=
proc
  res := []
  foreach u ∈ [u^1, ..., u^n]do
    L := Liste der (J_k, k) mit Leitmonom von e_k gleich u_{J_k}
    pairlis := grobnersyz(L)
    F := Liste der (e_i, e_j) mit (i, j) ∈ pairlis
    res := [op(res), op(F)]
  od
  return res
.


grobnersyz(L) :=
proc
  L1 := sort(L, (x, y) → lexless(x[1], y[1]))
  B := {}
  C := {}
  N := length(L1)
  for i := 2 to N do
      indi := L1[i][2]
      for j := 1 to i − 1 do
          indj := L1[j][2]
          B := B ∪ {{indi, indj}}
          conntab[{indi, indj}] := [{indi, indj}]
          partoftab[{indi, indj}] := {{indi, indj}}
      od
  od
  C := B
  for j := 2 to N do
      dmj := L1[j][1]
      indj := L1[j][2]
      for i := j − 1 to 1 by − 1 do
          dmi := L1[i][1]
          indi := L1[i][2]
          for k := 1 to N do
              if (k = i) ∨ (k = j) then next fi
              dmk := L1[k][1]
```

```
                indk := L1[k][2]
                dmij := dmi ∨ dmj
                if (divis(dmk, dmij)) ∧
                  ({indi, indj} ∉ conntab[{indi, indk}]) ∧
                  ({indi, indj} ∉ conntab[{indk, indj}])
                  then
                        C := C \ {{indi, indj}}
                        ctij := [op(conntab[{indi, indk}]), op(conntab[{indk, indj}])]
                        conntab[{indi, indj}] := ctij
                        foreach pp ∈ ctijdo
                          partoftab[pp] := partoftab[pp] ∪ {{indi, indj}}
                        od
                        for bb ∈ partoftab[{indi, indj}] do
                            conntab[bb] := subs({indi, indj} = op(ctij), conntab[bb])
                            for pp ∈ ctij do
                                partoftab[pp] := partoftab[pp] ∪ {bb}
                            od
                        od
                        partoftab[{indi, indj}] := {}
                fi
            od
        od
    od
    return C
.
```

Daß der Algorithmus $\mathsf{igb}(E)$ korrekt ist und terminiert, ist unmittelbar verständlich, wenn man folgende Schleifeninvarianten beachtet:

1. Die Liste $\mathsf{conntab}[(i,j)]$ besteht aus Paaren (i_α, j_α), so daß die $(e_{i_\alpha}, e_{j_\alpha})$ die sämtlichen Mitglieder einer Darstellungskette für (e_i, e_j) bilden.

2. Die Liste $\mathsf{partoftab}[(i,j)]$ dient lediglich der Beschleunigung des Algorithmus. Sie besteht aus den (i_α, j_α), für die (e_i, e_j) Teil einer Darstellungskette von $(e_{i_\alpha}, e_{j_\alpha})$ ist. Es handelt sich also um das zu conntab *inverse Verzeichnis.*

Der obige Algorithmus ist selbstverständlich nicht der einzig mögliche um eine Auswahl unter der Gesamtheit der $\mathrm{igb}(e_i, e_j)$ zu treffen, so daß diese Auswahl alle übrigen Integrabilitätsbedingungen in Form von Darstellungsketten erzeugt.

Versuche zeigen aber, daß er sowohl in Bezug auf die Laufzeit als auch in Bezug auf die Eliminierung redundanter Integrabilitätsbedingungen mit dem Verfahren von Janet ([7]) nicht nur sehr gut konkurrieren kann, sondern sogar in der Regel leicht überlegen ist.

Algorithmus 1.4.5 $\mathsf{janetBase}(E)$

E ist ein System von lpdgl, $\mathsf{janetBase}(E)$ *berechnet ein System E' von lpdgl, das (nach eventueller Normierung) eine Janet–Basis von E darstellt.*

```
do
   E := autored(E)
   I := igb(E)
   I := {igb_2(e_i, e_j)|(i, j) ∈ I, e_i, e_j ∈ E}
   I := {reduce(f, E)|f ∈ I}
   if I = {0}
```

```
    then
        return E
    else
        E := E ∪ I
  fi
od until false
```

Der Algorithmus janetBase(E) terminiert wegen Lemma 1.4.17. Das Ergebnis ist offensichtlich autoreduziert mit $(E') = (E)$ und für alle Integrabilitätsbedingungen $\mathrm{igb}_2(e_1, e_2)$, $e_1, e_2 \in E'$, gibt es eine Darstellungskette, deren Elemente $\mathrm{igb}_2(f_i, f_{i+1})$ auf zweite Art von E' zu 0 reduziert werden. Damit ist E' nach Satz 1.4.3 passiv und somit nach Normierung auf 1 der Leitkoeffizienten eine Janetbasis.

1.5 Lösungen von Systemen von lpdgl

1.5.1 Allgemeines

Sei E ein System von lpdgl in den Funktionen $u^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ über einem Definitionsring R. Sei S/R eine R-Funktionenalgebra, die $\frac{\partial}{\partial x^i}$ gestattet.

Definition 1.5.1 *Ein System $u_0^1, \ldots u_0^m \in S$ ist eine Lösung von E, wenn für jedes $e \in E$, $e = \sum a_{kJ} u_J^k - b = 0$ gilt:*

$$\sum a_{kJ} \cdot D_J u_0^k = b \tag{1.89}$$

Die Lösungen von E in der Algebra S bilden einen S_0–affinen Untermodul von S^m, den wir mit $Soln_S(E)$ bezeichnen. S_0 sei dabei der Konstantenring von S. Die Lösungen von E und (E) sind identisch.

Sei E eine Janetbasis von lpdgl in den u^i bezüglich einer Termordnung $<$.

Dann lassen sich die Monome u_J^k durch ihr Reduktionsverhalten gegenüber E in zwei Klassen einteilen

Definition 1.5.2 *Ein Monom u_J^k, das von E reduziert wird, nennen wir prinzipales Monom, ein Monom, das von E nicht reduziert wird, parametrisches Monom für E.*

Die prinzipalen Monome bilden also das früher eingeführte Monomideal $M_{(E)}$. Wir wollen nun als Vorbereitung für späteres zeigen, daß jedes Ideal von lpdgl endlich erzeugt ist.

Lemma 1.5.1 *Seien $(E) \subseteq (F)$ zwei Ideale von lpdgl mit $M_{(E)} = M_{(F)}$. Dann ist $(E) = (F)$.*

Beweis. Es sei $f \in (F) \notin (E)$. Dann läßt sich f mit (E) zu einem $f' \neq 0$ aus (F) reduzieren, das reduziert bezüglich (E) ist. Das Leitmonom von f' ist aber auch Leitmonom eines Elements von (E), was der Reduziertheit widerspricht. ■

Aus Satz 1.4.6 folgt

Lemma 1.5.2 *Es sei (E) ein Ideal von lpdgl in den Funktionen u^i, $<$ eine Termordnung. Dann gibt es endlich viele $u_{J_\alpha}^{i_\alpha}$, so daß die prinzipalen Monome $M_{(E)}$ eine Vereinigung von $D_K u_{J_\alpha}^{i_\alpha}$ sind. Wir nennen die $u_{J_\alpha}^{i_\alpha}$ auch eine Basis oder ein Erzeugendensystem von $M_{(E)}$.*

Also gilt

Satz 1.5.1 *Sei (E) ein Ideal von lpdgl in den Funktionen u^i. Dann existieren endlich viele lpdgl e_α, so daß $(E) = (e_\alpha)_\alpha$.*

Beweis. Man wähle $u_{J_\alpha}^{i_\alpha}$ wie im vorigen Lemma als Basis von $M_{(E)}$ und $e_\alpha \in (E)$ mit $\mathrm{lmon}(e_\alpha) = u_{J_\alpha}^{i_\alpha}$. Dann erzeugen die e_α wegen Lemma 1.5.1 das Ideal (E). ■

1.5.2 Der Existenzsatz von Riquier

Im folgenden soll J (und entsprechend K, L, I) für $J = (j_1, \ldots, j_n)$ mit $j_1, \ldots, j_n \geq 0$ stehen, j oder $|J|$ bedeute dann $j_1 + \cdots + j_n$. A sei eine $n \times l$–Matrix, so daß $J \cdot A = (d_l, \ldots, d_1)$ wird, wobei $d_l, \ldots, d_1 \geq 0$, falls A, wie im folgenden immer angenommen, nur nichtnegative Einträge hat. $J!$ stehe für $j_1! \cdots j_n!$und $J + K$ für $(j_1 + k_1, \ldots, j_n + k_n)$. $J \geq K$ bedeute $j_\nu \geq k_\nu$ und analog sei $J > K$ erklärt.

Mit einer Variable $\underline{s}$ sei $(s_1, \ldots, s_q)$ für ein bestimmtes $q > 0$ gemeint und es sei $\underline{s}^J = {s_1}^{j_1} \cdots {s_n}^{j_n}$.

$u^1, \ldots, u^m$ seien Funktionen der komplexen Variablen $x^1, \ldots, x^n$ und für eine beliebige Funktion $a(x^1, \ldots, x^n)$ sei $a_J(x^1, \ldots, x^n)$ wie üblich als $\frac{\partial^j}{\partial (x^1)^{j_1} \cdots \partial (x^n)^{j_n}} a(x^1, \ldots, x^n)$ definiert. $a(0)$ stehe für $a(0, \ldots, 0)$.

Eine $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ analytische (bzw. formal–entwickelbare) lpdgl e sei eine lpdgl über dem Koeffizientenring $\mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]$ (bzw. $\mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]_{\text{formal}}$).

Eine in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ analytische (bzw. formal–entwickelbare) Lösung einer in $\mathbf{x}_0$ analytischen (bzw. formal–entwickelbaren) lpdgl in den differentiellen Unbestimmten $u^1, \ldots, u^m$ sei ein System von $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in S$ wie in Definition 1.5.1, wobei $S = \mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]$ (bzw. $S = \mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]_{\text{formal}}$) ist.

Eine auf $U \subseteq \mathbb{C}^n$ analytische lpdgl e sei eine lpdgl über dem Ring $\mathcal{O}(U)$ der auf U holomorphen Funktionen und entsprechend eine analytische Lösung von e eine Lösung gemäss Definition 1.5.1 und $S = \mathcal{O}(U)$.

Theorem 1.5.1 *Es sei E eine Janet–Basis von in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ analytischen, homogenen lpdgl in den Funktionen $u^i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ bezüglich einer totdeg–Matrixtermordnung.*

Weiter seien $w^i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ vorgegebene in $\mathbf{x}_0$ analytische Funktionen.

Dann existiert für E um $\mathbf{x}_0$ eine lokale, eindeutige, analytische Lösung $\bar{u}^i(\mathbf{x})$ mit $D_J \bar{u}^i(\mathbf{x}_0) = D_J w^i(\mathbf{x}_0)$ für jedes parametrische Monom $D_J u^i$.

Bevor wir das Theorem beweisen, formulieren wir zunächst einen Hilfssatz und einige Lemmata

Satz 1.5.2 *Es sei E eine Janet–Basis von in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ formal–entwickelbaren, homogenen ldpgl in den Funktionen $u^i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ bezüglich einer beliebigen Termordnung. Für jedes parametrische Monom $D_J u^i$ sei der Wert $w_J^i = D_J u^i(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{C}$ im vorhinein festgelegt. Dann existiert für E eine eindeutige, um $\mathbf{x}_0$ formal–entwickelbare Lösung $\bar{u}^i$ mit $D_J \bar{u}^i(\mathbf{x}_0) = w_J^i$.*

Beweis. Wir setzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{x}_0 = 0$ und machen den Ansatz

$$\bar{u}^i = \sum a_J^i \, \underline{x}^J \quad \underline{x} = (x^1, \ldots, x^n) \tag{1.90}$$

Wir ermitteln nun für alle prinzipalen u_J^i die Normalform bezüglich Reduktion mit E:

$$N_1(u_J^i) = \sum c_{kKiJ} \, u_K^k \tag{1.91}$$

(beachte Bemerkung 1.4.16) wobei die endliche Summe rechts sich nur über parametrische Ableitungen bezüglich E erstreckt. Da $N_1(u_J^i - N_1(u_J^i)) = N_1(u_J^i) - N_1(u_J^i) = 0$ gilt, ist $u_J^i - N_1(u_J^i) \in (E)$. Also erfüllt jede Lösung $\bar{u}^i$ von E auch $\bar{u}_J^i(0) - \sum c_{kKiJ}(0) \bar{u}_K^k(0)$, so daß die prinzipalen Monome durch die parametrischen Monome eindeutig bestimmt sind.

Für alle parametrischen Monome u_K^k wähle man nun a_K^k so, daß $w_K^k = u_K^k(0) = K! \, a_K^k$ wird. Die prinzipalen Ableitungen $u_J^i(0)$ sind dann nach obiger Überlegung durch $u_J^i(0) = \sum c_{kKiJ}(0) \, w_K^k$ eindeutig festgelegt, und somit kann $a_J^i = u_J^i(0)/J!$ gesetzt werden. Es ist dann $\bar{u}_J^i(0) = N_1(u_J^i)(0)$ für *jedes* Monom $\bar{u}_J^i$.

Es bleibt zu zeigen, daß die so definierten $\bar{u}^i$ wirklich eine Lösung von E darstellen. Dies gilt jedenfalls, wenn $(D_J(e(\bar{u}^i)))(0) = 0$ für jedes J und jedes $e \in E$ ist. Dann ist auch $e(\bar{u}^i) = 0$ weil $e(\bar{u}^i)$ eine formale Potenzreihe ist.

Es sei also $D_J e = \sum b_{iK} u^i_K \in (E)$ und deshalb $0 = N_1(D_J e) = \sum b_{iK} N_1(u^i_K)$. Umsomehr ist $0 = \sum b_{iK}(0) N_1(u^i_K)(0) = \sum b_{iK}(0) \bar{u}^i_K(0) = (D_J e)(\bar{u}^i)(0)$. Das aber war noch zu zeigen. ■

Aus Satz 1.5.2 folgt die Existenz einer formal–entwickelbaren, eindeutigen Lösung in Theorem 1.5.1. Da jede analytische Lösung auch formal–entwickelbar ist, bleibt also nur zu zeigen, daß die in Satz 1.5.2 beschriebene formale Lösung unter den Voraussetzungen des Theorems analytisch ist. Wir tun dies, indem wir zeigen, daß die Koeffizienten a^i_J nicht „zu schnell“ wachsen.

Lemma 1.5.3 *Es ist für $j_1, \ldots, j_n \geq 0$ und $j = j_1 + \cdots + j_n$*

$$\binom{j}{j_1, \ldots, j_n} \leq n^j \tag{1.92}$$

Beweis. Der Ausdruck $\binom{j}{j_1,\ldots,j_n}$ gibt an, auf wie viele Arten j unterscheidbare Elemente so auf n Töpfe zu verteilen sind, daß der ν–te Topf j_ν–Elemente erhält, während n^j die Gesamtzahl der Möglichkeiten angibt, j unterscheidbare Elemente auf n Töpfe zu verteilen. ■

Lemma 1.5.4 *Es sei $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ und $0 \leq k_\nu \leq j_\nu$. Dann ist*

$$\binom{J}{K} \stackrel{def}{=} \binom{j_1}{k_1} \cdots \binom{j_n}{k_n} \leq \binom{j_1 + \cdots + j_n}{k_1 + \cdots + k_n} \tag{1.93}$$

Beweis. Der linke Ausdruck ist die Zahl der Möglickeiten aus einer Menge von $j = j_1 + \cdots + j_n$ unterscheidbaren Elementen, von denen j_ν mit einem Merkmal M_ν behaftet sind, $k = k_1 + \cdots + k_n$ Elemente so auszusuchen, daß die Auswahl genau k_ν Elemente mit dem Merkmal M_ν enthält. Der rechte Ausdruck gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, beliebige k aus den j Elementen auszusuchen. ■

Lemma 1.5.5 *Es sei $<$ eine Matrixtermordnung für die Monome u^i_J, die durch*

$$u^i_J < u^k_L \Leftrightarrow JA + B_i <_{lex} LA + B_k \tag{1.94}$$

gegeben ist. Dann läßt sich

$$Z(u^i_J) = Z(JA + B_i) = \underline{t}^{(JA+B_i)} \tag{1.95}$$

mit $t_1, \ldots, t_l > 1$ so definieren, daß für eine endliche Menge $\mathcal{M}$ von u^i_J gilt

$$u^i_J \in \mathcal{M} < u^k_L \in \mathcal{M} \Rightarrow Z(LA + B_k) > M\, Z(JA + B_i) \tag{1.96}$$

für ein bestimmtes, vorher festgelegtes $M > 0$. Ausserdem gilt

$$Z(u^i_{(J+K)}) = \underline{t}^{KA} Z(u^i_J) > Z(u^i_J) \tag{1.97}$$

Beweis. Es sei $d_\nu < \beta$, $\beta > 1$ und ganz, für alle $(d_1, \ldots, d_l) = JA + B_i$ und $u^i_J \in \mathcal{M}$. Dann ist

$$\sum d_\nu \beta^{l+1-\nu} - \sum \bar{d}_\nu \beta^{l+1-\nu} \geq \beta \tag{1.98}$$

wenn $LA + B_k = (d_1, \ldots, d_l) >_{\text{lex}} (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_l) = JA + B_i$ und $u^i_J, u^k_L \in \mathcal{M}$ (Zahlen zur Basis β !). Man setze also $t_\nu = t^{\beta^{l+1-\nu}}$ mit $t^\beta > M$, und

$$Z(JA + B_i) = \prod \left(t^{\beta^{l+1-\nu}}\right)^{d_\nu} = t^{\sum d_\nu \beta^{l+1-\nu}} \tag{1.99}$$

erfüllt die an $Z(JA + B_i)$ gerichteten Forderungen. ■

Lemma 1.5.6 *Es sei* $u = \sum a_J\ (x^1)^{j_1} \cdots (x^n)^{j_n}$, $a_J \in \mathbb{C}$ *eine formale Potenzreihe um* 0. *Dann ist* u *eine um* 0 *analytische Funktion genau dann, wenn für* $D_J u(0) = J!\, a_J$ *gilt*

$$|u_J(0)| \leq C\, J!\, \underline{s}^J \tag{1.100}$$

oder

$$|u_J(0)| \leq C\, j!\, \underline{s}^J \tag{1.101}$$

oder

$$|u_J(0)| \leq C\, j!\, \frac{1}{(a+j)^p}\, \underline{s}^J, \quad , a > 0, p > 0 \tag{1.102}$$

für geeignete $s_1, \ldots, s_n > 0$, $C > 0$.

Beweis Bedingung (1.100) ist wohlbekannt, (1.101) ist mit ihr wegen $1 \leq j!/J! = \binom{j}{j_1,\ldots,j_n} \leq n^j$ äquivalent. Bedingung (1.102) ist mit Bedingung (1.101) wegen $1 \leq (a+j)^p \leq Kc^j$ (für geeignete $K > 0$, $c > 0$) äquivalent ■

Lemma 1.5.7 *Es seien* a, u *zwei Funktionen von* $x^1, \ldots, x^n$, a *analytisch um* 0 *und mit* $|a_J(0)| \leq Cj!\frac{1}{(j+2)^p}\, \underline{s}^J$ *für* $s_1, \ldots, s_n > 0$ *geeignet und* $p > 0$ *so groß, daß*

$$\sum_{j_1 \geq 0, \ldots, j_n \geq 0} \frac{1}{(j+2)^p} < 1 \tag{1.103}$$

wird.

Für u *gelte* $|u_L(0)| \leq\ D\, l!\, \underline{s}^L\, Z(LA+B)$ *für alle* $u_L(0)$ *mit* $L \leq K + I$, *wobei* Z *eine Funktion ist, wie sie in Lemma 1.5.5 definiert wurde.*

Dann ist

$$|D_K(au_I)(0)| \leq CD\,(k+i)!\, \underline{s}^{K+I}\, Z((K+I)A+B) \tag{1.104}$$

Beweis. Es ist

$$D_K(au_I) = \sum_{L \leq K} \binom{K}{L} D_L(a) D_{K-L} u_I \tag{1.105}$$

also

$$\begin{aligned}
&|D_K(au_I)(0)| \leq \sum_{L \leq K} \binom{K}{L} |a_L(0)|\, |u_{K-L+I}| \\
&\leq \sum_{L \leq K} \binom{k}{l} C\, l!\, \frac{1}{(l+2)^p}\ \underline{s}^L\ D\ (k-l+i)!\ \underline{s}^{K-L+I}\, Z((K-L+I)A+B) \\
&\leq \sum_{L \leq K} \binom{k}{l} C\, l!\, \frac{1}{(l+2)^p}\ D\ (k-l+i)!\ \underline{s}^{K+I}\, Z((K+I)A+B) \\
&\text{da } K+I = (K-L+I)+L \text{ und (1.97) gilt} \\
&= CD\, \underline{s}^{K+I}\, Z((K+I)A+B)\ \ (k+i)!\ \sum_{L \leq K} \binom{k}{l} \Big/ \binom{k+i}{l}\, \frac{1}{(l+2)^p} \\
&\leq CD\, \underline{s}^{K+I}\, Z((K+I)A+B)\ (k+i)! \quad \text{wegen (1.103)}
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Lemma 1.5.8 *Es sei* E *eine Janet–Basis von in einem Punkt* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ *analytischen, homogenen lpdgl in den Funktionen* $u^i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$.

Weiter seien $w^i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ *vorgegebene in* $\mathbf{x}_0$ *analytische Funktionen und* $e_1, \ldots, e_s \in (E)$ *Elemente des von* E *erzeugten Ideals, die bezüglich einer totdeg–Matrixtermordnung* $<$ *geordnet den Leitkoeffizienten* 1 *haben, also normiert sind.*

Für diese e_ν gelte, daß für alle bis auf endlich viele prinzipalen Monome u_J^i ein e_ν existiert, so daß das Leitmonom von $D_K(e_\nu)$ gleich u_J^i wird.

Dann existiert für E um $\mathbf{x}_0$ eine lokale, eindeutige, analytische Lösung $\bar{u}^i(\mathbf{x})$ mit $D_J\bar{u}^i(\mathbf{x}_0) = D_J w^i(\mathbf{x}_0)$ für jedes parametrische Monom $D_J u^i$.

Beweis. Die totdeg–Matrixtermordnung $<$ sei definiert durch

$$u_J^i < u_L^k \Leftrightarrow B_i + JA <_{\text{lex}} B_k + LA \tag{1.106}$$

Nach Satz 1.5.2 existiert eine eindeutige formale Lösung

$$\bar{u}^i = \sum c_J^i \underline{x}^J \tag{1.107}$$

mit $\bar{u}_K^i(0) = w_K^i(0)$ für die parametrischen Monom $\bar{u}_K^i$. Es sei nun $(a_\alpha(\underline{x}))_\alpha$ die Gesamtheit der in den e_ν auftretenden analytischen Koeffizienten. Dann wählen wir $\underline{s} = (s, \ldots, s)$, $C > 0$, $s > 0$, $D > 0$ so, daß

$$|(D_J a_\alpha)(0)| \leq C\, j!\, \frac{1}{(2+j)^p}\, \underline{s}^J = C\, j!\, \frac{1}{(2+j)^p}\, s^j \tag{1.108}$$

und

$$|(D_J w^i)(0)| \leq D\, j!\, \underline{s}^J = D\, j!\, s^j \tag{1.109}$$

und für die prinzipalen Monome u_J^i, die nicht als Leitmonome von $D_K e_\nu$ dargestellt werden können

$$|\bar{u}_J^i(0)| \leq D\, j!\, s^j\, Z(B_i + JA) \tag{1.110}$$

gilt, wobei p die in Lemma 1.5.7 genannte Bedingung erfüllt.

Die Funktion $Z(JA + B_i)$ sei nun gemäß Lemma 1.5.5 gebildet, wobei $\mathcal{M}$ die endliche Menge der in den $e_\nu \in E$ enthaltenen Monome sei und $M > Cm_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, s$, wo m_ν für die Anzahl der in e_ν enthaltenen Monome stehe.

Wir zeigen nun durch Induktion, daß

$$|\bar{u}_J^i(0)| \leq D\, j!\, s^j\, Z(B_i + JA) \tag{1.111}$$

für alle $\bar{u}_J^i(0)$ gilt.

Es sei also (1.111) für u_J^i noch zu zeigen, und für alle $u_L^k < u_J^i$ schon nachgewiesen. Wenn u_J^i eine parametrische Ableitung ist, so folgt (1.111) aus (1.109) und $Z(B_i + JA) \geq 1$. Es sei also u_J^i eine prinzipale Ableitung. Dann existiert ein $e_\nu \in E$, so daß u_J^i das Leitmonom von $D_K e_\nu$ für ein geeignetes K ist oder u_J^i gehört zu den möglicherweise vorhandenen endlich vielen Ausnahmemonomen, für die aber (1.111) schon vorausgesetzt wurde. Wir kürzen ab, $e = e_\nu$ und schreiben e aus als

$$e = u_L^i + \sum a_{nP} u_P^n \tag{1.112}$$

Dann ist $D_K e$ gleich

$$D_K e = D_K(u_L^i) + \sum D_K(a_{nP} u_P^n) = u_J^i + \sum D_K(a_{nP} u_P^n) \tag{1.113}$$

und somit

$$\bar{u}_J^i(0) = -\sum \left(D_K(a_{nP}\bar{u}_P^n)\right)(0) \tag{1.114}$$

also

$$|\bar{u}_J^i(0)| \leq \sum |\left(D_K(a_{nP}\bar{u}_P^n)\right)(0)| \tag{1.115}$$

Nach Lemma 1.5.7 gilt

$$|D_K(a_{nP}\bar{u}_P^n)(0)| \leq C\, D\, (k+p)!\, s^{k+p}\, Z((K+P)A + B_n) \tag{1.116}$$

Als Voraussetzung für die Anwendung von Lemma 1.5.7 ist dabei lediglich das Vorliegen von

$$\bar{u}^n_M(0) \leq D\, m!\, s^m\, Z(B_n + MA) \tag{1.117}$$

für $M \leq K + P$ einer näheren Betrachtung wert. Im Fall $M = K + P$ ist $u^n_{K+P} < u^i_{K+L} = u^i_J$ (weil $u^n_P < u^i_L$ in e) und für $M < K + P$ ist $m < k + p$, also weil die Termordnung totdeg ist $u^n_M < u^n_{K+P} < u^i_J$. Nach Induktionsannahme ist also (1.117) für die nötigen n und M erfüllt.

Da $<$ eine totdeg–Termordnung ist, gilt $k + p \leq k + l = j$. Weiterhin ist nach den über Z getroffenen Annahmen $Z(u^n_P) < Z(u^i_L)/M$ für die u^n_P, u^i_L aus (1.112). Also ist wegen $Z(u^n_{P+K}) = \underline{t}^{KA} Z(u^n_P)$ und $Z(u^i_{L+K}) = \underline{t}^{KA} Z(u^i_L)$ auch $Z(u^n_{P+K}) < Z(u^i_{L+K})/M = Z(u^i_J)/M$. Wir können also (1.116) durch

$$|D_K(a_{nP}\bar{u}^n_P)(0)| \leq C\, D\, j!\, s^j\, Z(JA + B_i)/M \tag{1.118}$$

ersetzen. Beachten wir jetzt, daß $M > Cm$, wobei $m = m_\nu - 1$ die Anzahl der Summanden in (1.115) bezeichnet, so ist (1.111) induktiv bewiesen.

Nun ist $Z(JA + B) \leq t_1^{|JA+B|}$ und somit wegen $|JA + B_i| < \alpha(j + 1)$ auch $Z(JA + B) < \tau^j$ mit einem geeigneten $\tau > 0$ gezeigt. Damit ist aber nach Lemma 1.5.6 $\bar{u}^i(\mathbf{x})$ als analytisch um 0 nachgewiesen. ■

Das Theorem von Riquier 1.5.1 wird dann zu einem einfachen Korollar von Lemma 1.5.8, indem man als e_ν, $\nu = 1, \ldots, s$ die Gleichungen von E selbst nimmt. ■

Beispiel 1.5.1 *Im Theorem von Riquier (Theorem 1.5.1) hatten wir als Bedingung aufgenommen, daß die Termordnung, bezüglich derer das vorgelegte System von lpdgl eine Janet–Basis darstellt, eine totdeg–Termordnung ist. Diese Bedingung ist auch notwendig, wovon man sich mit folgendem Beispiel überzeugt:*

Es sei $u(x, y)$ eine von den Unbestimmten x, y abhängige Veränderliche und u genüge der lpdgl

$$u_y - u_{xx} = 0 \tag{1.119}$$

die um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ analytisch ist. Die Termordnung sei so gewählt, daß $u_y > u_{xx}$ ist, also die parametrischen Monome durch $u_{x,n;\, y,0}$, $n = 1, 2, \ldots$ gegeben sind. Dabei soll $u_{x,i;\, y,j}$ für $\partial^i_x\, \partial^j_y\, u$ stehen.

Offensichtlich bildet die Gleichung (1.119) *auch eine Janet–Basis zu dieser Termordnung und somit sind alle Voraussetzungen von Theorem 1.5.1 erfüllt, bis auf die totdeg–Natur der Termordnung.*

Wir wählen nun als Funktion $w(x, y)$, die die parametrischen Monome bestimmt

$$w(x, y) = 1/(1 - ax) = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^nx^n + \cdots \tag{1.120}$$

und fordern für die parametrischen Monome

$$u_{x,n;\, y,0}(0, 0) = \partial^n_x\, w(0, 0) = n!\, a^n \tag{1.121}$$

Induktiv zeigt man, daß dann

$$u_{x,n;\, y,i}(0, 0) = a^{n+2i}\, (n + 2i)! \tag{1.122}$$

ist.

Für $i = 0$ folgt dies aus der vorigen Gleichung und aus (1.119) *folgt induktiv*

$$u_{x,n;\, y,(i+1)}(0, 0) = u_{x,(n+2);\, y,i}(0, 0) = \tag{1.123}$$

$$a^{n+2+2i}\, (n + 2 + 2i)! = a^{n+2(i+1)}\, (n + 2(i + 1))! \tag{1.124}$$

und speziell $u_{x,n;\,y,n}(0,0) = a^{3n}\,(3n)!$.

Andererseits muss, damit u *um* $(0,0)$ *analytisch ist* $u_{x,n;\,y,n}(0,0) \leq n!\,n!\,R^{2n}$ *für geeignetes* $R > 0$ *sein, also*

$$a^{3n}\,(3n)! \leq n!\,n!\,R^{2n} \quad \textit{also} \tag{1.125}$$

$$\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n}\,n! \leq \left(R^2/a^3\right)^n \tag{1.126}$$

was für alle n *offensichtlich unmöglich ist, da* $n!$ *schneller wächst als* C^n *und* $\binom{n}{k} \geq 1$ *ist.*

Eine andere Version des Existenzsatzes von Riquier kann für den Fall formuliert werden, daß es nur endlich viele parametrische Monome gibt. Hier können wir die Einschränkung aus Theorem 1.5.1 fortfallen lassen, daß die Termordnung, bezüglich derer E eine Janet–Basis ist, eine totdeg–Matrixtermordnung ist.

Satz 1.5.3 *Es sei* E *eine Janet–Basis von in einem Punkt* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{C}^n$ *analytischen homogenen lpdgl in den Funktionen* $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\ldots,m$ *und es sei* $\mathbb{P}(E) = \{u^{i_\nu}_{K_\nu}\}_{\nu=1,\ldots,N}$ *die endliche Menge der parametrischen Monome von* E. *Weiter sei* $w_\nu \in \mathbb{C}$ $(\nu = 1,\ldots,N)$ *vorgegeben. Dann existiert eine eindeutige, in* $\mathbf{x_0}$ *analytische Lösung* $\bar{u}^i(\underline{x})$ *von* E *mit* $\bar{u}^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = w_\nu$ *für* $\nu = 1,\ldots,N$.

Beweis. Man wählt ein p so daß $p > k$ für alle $u^i_K \in \mathbb{P}(E)$. Dann bildet man die Elemente $u^i_J - N_1(u^i_J) = e^i_J \in (E)$ für alle J mit $j = p$. Sie sind bezüglich einer beliebigen totdeg–Termordnung $<$ auf 1 normiert und analytisch und erfüllen ausserdem die Voraussetzung, daß jedes prinzipale Monom u^i_L mit $l \geq p$ als Leitmonom eines $D_M(e^i_J)$ für M, i, J geeignet auftritt. Für diese e^i_J als System von Elementen e_ν, $\nu = 1,\ldots,s$ und eine beliebige totdeg–Termordnung $<$ sind die Voraussetzungen von Lemma 1.5.8 in Bezug auf E erfüllt, und somit ist die Analytizität der Lösung gesichert. ■

Bemerkung 1.5.1 *In den obigen drei Sätzen über die Lösungen von Janetbasen von lpdgl haben wir immer nur von Existenz und Eindeutigkeit einer bestimmten Lösung gesprochen. Tatsächlich bilden die Lösungen aber* $\mathbb{C}$*–Vektorräume die im einzelnen folgenden* $\mathbb{C}$*–Vektorrräumen isomorph sind:*

- *Im Fall formal–analytischer lpdgl (Satz 1.5.2) ist der Lösungsraum isomorph* $\mathbb{C}^{\mathbb{P}}$, *wobei* $\mathbb{P}$ *die Menge der parametrischen Monome der Janetbasis sein soll.*
- *Im Fall analytischer lpdgl (Theorem von Riquier) ist der Lösungsraum isomorph zum Raum der in* $\mathbf{x_0}$ *analytischen Potenzreihen* $w^i(\underline{x})$, $i = 1,\ldots,m$ *mit* $D_J w^i(\mathbf{x_0}) = 0$ *für alle prinzipalen* u^i_J.
- *Im Fall endlich vieler parametrischer Monome (Satz 1.5.3) ist der Lösungsraum isomorph* $\mathbb{C}^{\mathbb{P}}$, *wobei* $\mathbb{P}$ *die Menge der parametrischen Monome der Janetbasis sein soll.*

1.5.3 Anwendungen des Existenzsatzes von Riquier

Wir wollen im Folgenden den Existenzsatz von Riquier auf inhomogene Systeme von lpdgl verallgemeinern.

Definition 1.5.3 *Es sei* $e = \sum a_{iJ}u^i_J - b$ *eine nicht notwendig homogene lpdgl,* $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\ldots,m$ *ein System von abhängigen Veränderlichen, und* $w(x^1,\ldots,x^n)$ *eine weitere von* $x^1,\ldots,x^n$ *abhängige Veränderliche. Dann ist* $\hat{e} = \sum a_{iJ}u^i_J - bw$ *die* Homogenisierung *von* e *mit* w.

Lemma 1.5.9 *Es sei $e \xrightarrow{f} e_1$ bzw. $e \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{f} e_1$ eine Reduktion von nicht notwendig homogenen lpdgl. Weiter seien $\hat{e}$, $\hat{e_1}$, $\hat{f}$ Homogenisierungen von e, e_1, f mit derselben Funktion w. Dann ist*

$$\hat{e} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{e_1} + \sum_{|J|>0} c_J w_J \tag{1.127}$$

$$\hat{e} \xrightarrow{r_2} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{e_1} + \sum_{|J|>0} c_J w_J \tag{1.128}$$

Beweis. Es sei $e = \alpha D_K u + r - \beta_e$, $f = \beta u - s - \beta_f$, wobei u das Leitmonom von f ist, β_f der konstante Term von f und s frei von u und $\mathbf{1}$ ist. β_e ist der konstante Term von e und r frei von $D_K u$, dem Term von e, der von f reduziert werden soll. Wir betrachten der Kürze halber nur die Reduktion erster Art, der Beweis von Gleichung (1.128) ist nicht komplizierter. Zunächst ist

$$e_1 = e - \alpha D_K(f/\beta) \qquad \text{also} \tag{1.129}$$

$$e_1 = r + \alpha D_K(s/\beta) - \beta_e + D_K(\beta_f/\beta) \qquad \text{also} \tag{1.130}$$

$$\hat{e_1} = r + \alpha D_K(s/\beta) - (\beta_e - D_K(\beta_f/\beta))\, w \tag{1.131}$$

weiter gilt

$$\hat{e} = \alpha D_K u + r - \beta_e w \tag{1.132}$$

$$\hat{f} = \beta u - s - \beta_f w \tag{1.133}$$

$$\tag{1.134}$$

und deshalb für $\bar{e}$ mit $\hat{e} \xrightarrow{\hat{f}} \bar{e}$

$$\bar{e} = r - \beta_e w + \alpha D_K(s/\beta) + D_K(\beta_f/\beta w) \tag{1.135}$$

also weiter

$$\hat{e_1} - \bar{e} = \sum_{|J|>0} c_J w_J \tag{1.136}$$

■

Lemma 1.5.10 *Es seien e_1 und e_2 zwei nicht notwendig homogene lpdgl (in den abhängigen Veränderlichen $u^i(x^1, \ldots, x^n)$) für die $igb_1(e_1, e_2)$ bzw. $igb_2(e_1, e_2)$ definiert ist. Dann ist*

$$igb_i(\hat{e_1}, \hat{e_2}) = \widehat{igb_i(e_1, e_2)} + \sum_{|J|>0} c_J w_j \tag{1.137}$$

wobei $\hat{e_i}$ die Homogenisierung von e_i mit einer Funktion w darstellt.

Beweis. Es sei $e_i = \alpha_i u_i + v_i - \beta_i$, wobei u_i das Leitmonom von e_i, β_i der konstante Term und v_i frei von u_i sei. Weiter sei $D_{K_1} u_1 = D_{K_2} u_2$. Wir betrachten der Kürze halber nur den Fall $\mathrm{igb}_1(e_1, e_2) = D_{K_1}(v_1/\alpha_1 - \beta_1/\alpha_1) - D_{K_2}(v_2/\alpha_2 - \beta_2/\alpha_2)$. Der konstante Term ist also gleich $D_{K_1}(-\beta_1/\alpha_1) + D_{K_2}(\beta_2/\alpha_2)$, homogenisiert also gleich $(D_{K_1}(-\beta_1/\alpha_1) + D_{K_2}(\beta_2\alpha_2))\, w$. Weiter ist $\mathrm{igb}_1(\hat{e_1}, \hat{e_2}) = D_{K_1}(v_1/\alpha_1) - D_{K_1}(\beta_1/\alpha_1 w) - D_{K_2}(v_2/\alpha_2) + D_{K_2}(\beta_2/\alpha_2 w)$. Vergleicht man die Terme, die w enthalten, folgt das Ergebnis. ■

Die folgenden beiden Lemmata zeigen wie eine Matrixtermordnung in den oben beschriebenen Fällen der Hinzunahme einer neuen differentiellen Unbestimmten w so erweitert werden kann, daß alle $w_J^i < u_K^j$ werden (Lemma 1.5.12) oder im Falle einer ursprünglichen totdeg–Matrixtermordnung die neue Termordnung ebenfalls eine totdeg–Matrixtermordnung ist, für die dann $w_J^i < u_K^j$ ist, wenn $|J| \leq |K|$ gilt.

Lemma 1.5.11 *Es sei $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,\ldots,m$ ein System von abhängigen und unabhängigen Veränderlichen, und $<$ eine totdeg–Matrixtermordnung auf den Monomen u^i_J, die durch die Matrix A und die Vektoren B_i, $i=1,\ldots,m$ charakterisiert ist (also $u^i_J < u^k_L$ für $JA+B_i <_{lex} LA+B_k$). Weiter sei $w(x^1,\ldots,x^n)$ eine weitere abhängige Veränderliche. Dann lässt sich $<$ zu einer Termordnung $<_1$ für die u^i_J und w_J erweitern, so daß gilt*

- *$<_1$ ist eine totdeg–Matrixtermordnung.*
- *$w_J <_1 u^i_K$ für alle $i=1,\ldots,m$ und $|J|\leq|K|$.*
- *Eingeschränkt auf die u^i_J ist $<_1$ mit $<$ identisch.*

Beweis. Es sei $A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_l)$, $B_i=(b^i_1,\ldots,b^i_l)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $\mathbf{a}_1=(1,\ldots,1)^t$ und $b^i_1=0$ für alle i ist. Wäre dem nämlich nicht so, so könnte man ein solches $\mathbf{a}_1$ der Matrix A und solche b^i_1 den B_i voranstellen, ohne die Ordnung $<$ zu beeinflussen. Setze nun $\bar{A}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_w,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_l)$, wobei $\mathbf{a}_w=(0,\ldots,0)^t$ sein soll. Setze weiter $\bar{B}_i=(0,1,b^i_2,\ldots,b^i_l)\in\mathbb{Z}^{l+1}$ und $\bar{B_w}=(0,0,b^{i_0}_2,\ldots,b^{i_0}_l)\in\mathbb{Z}^{l+1}$ für ein beliebiges $1\leq i_0\leq m$. Die Termordnung $<_1$ wird dann durch $\bar{A}$, $\bar{B}_i$ und $\bar{B_w}$ definiert, indem u^i_J der Vektor $J\bar{A}+\bar{B}_i$ und w_J der Vektor $J\bar{A}+\bar{B_w}$ zugeordnet wird. ■

Lemma 1.5.12 *Es sei $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,\ldots,m$ ein System von abhängigen und unabhängigen Veränderlichen, und $<$ eine Matrixtermordnung auf den Monomen u^i_J, die durch die Matrix A und die Vektoren B_i, $i=1,\ldots,m$ charakterisiert ist (also $u^i_J < u^k_L$ für $JA+B_i <_{lex} LA+B_k$). Weiter sei $w(x^1,\ldots,x^n)$ eine weitere abhängige Veränderliche. Dann lässt sich $<$ zu einer Termordnung $<_1$ für die u^i_J und w_J erweitern, so daß gilt*

- *$<_1$ ist eine Matrixtermordnung.*
- *$w_J <_1 u^i_K$ für alle $i=1,\ldots,m$.*
- *Eingeschränkt auf die u^i_J ist $<_1$ mit $<$ identisch.*

Beweis. Es sei $A=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_l)$, $B_i=(b^i_1,\ldots,b^i_l)$. Setze nun $\bar{A}=(\mathbf{a}_w,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_l)$, wobei $\mathbf{a}_w=(0,\ldots,0)^t$ sein soll. Setze weiter $\bar{B}_i=(1,b^i_1,b^i_2,\ldots,b^i_l)\in\mathbb{Z}^{l+1}$ und $\bar{B_w}=(0,b^{i_0}_1,b^{i_0}_2,\ldots,b^{i_0}_l)\in\mathbb{Z}^{l+1}$ für ein beliebiges $1\leq i_0\leq m$. Die Termordnung $<_1$ wird dann durch $\bar{A}$, $\bar{B}_i$ und $\bar{B_w}$ definiert, indem u^i_J der Vektor $J\bar{A}+\bar{B}_i$ und w_J der Vektor $J\bar{A}+\bar{B_w}$ zugeordnet wird. ■

Satz 1.5.4 *Es sei E eine Janet–Basis von nicht notwendig homogenen lpdgl in den abhängigen Veränderlichen $u^i(x^1,\ldots,x^n)$ und zur Termordnung $<$. $\hat{E}$ sei $\{\hat{e}\,|\,e\in E\}$ wobei $\hat{e}$ die Homogenisierung von e gemäss Definition 1.5.3 mit einer abhängigen Veränderlichen $w(x^1,\ldots,x^n)$ sei. $<_1$ sei die Erweiterung von $<$ gemäss Lemma 1.5.11 oder Lemma 1.5.12. $\hat{E}_1$ sei die Erweiterung von $\hat{E}$ um die Gleichungen $g^i=w_{x^i}$. Dann ist $\hat{E}_1$ eine Janet–Basis in der Termordnung $<_1$ in den abhängigen Veränderlichen $u^i(x^1,\ldots,x^n)$ und $w(x^1,\ldots,x^n)$.*

Beweis. Offensichtlich ist das System $\hat{E}_1$ autoreduziert, es bleibt also nur zu zeigen, dass es auch passiv ist. Die $\mathrm{igb}_1(g^i,g^j)$ verschwinden trivial, und das gleiche gilt auch für alle $\mathrm{igb}_1(\hat{e},g^i)$ mit $e\in E$, denn solche kann es nur für $e=-\beta$ mit konstantem Term β geben. Es bleiben also nur die $\mathrm{igb}_1(\hat{e_1},\hat{e_2})$ mit $e_1,e_2\in E$. Für diese gelte

$$\mathrm{igb}_1(e_1,e_2)=q_0\xrightarrow{f_1}q_1\xrightarrow{f_2}q_2\longrightarrow\cdots\xrightarrow{f_r}q_r=0 \tag{1.138}$$

Dann ist zunächst nach Lemma 1.5.10

$$\mathrm{igb}_1(\hat{e_1},\hat{e_2}) = \widehat{\mathrm{igb}_1(e_1,e_2)} + \sum_{|J|>0} c_J w_J \xrightarrow{G^*} \widehat{\mathrm{igb}_1(e_1,e_2)} = \hat{q_0} \tag{1.139}$$

wobei G für die Gesamtheit der g^i stehe. Weiter folgt aus $q_{i-1} \xrightarrow{f_i} q_i$ und Lemma 1.5.9 daß

$$\hat{q_{i-1}} \xrightarrow{\hat{f_i}} \hat{q_i} + \sum_{|J|>0} c_J w_J \xrightarrow{G^*} \hat{q_i} \tag{1.140}$$

Nimmt man (1.139) und (1.140) für alle $i = 1,\ldots,r$ zusammen, folgt $\mathrm{igb}_1(\hat{e_1},\hat{e_2}) \xrightarrow{\hat{E_1}^*} 0$ also die Passivität von $\hat{E_1}$. ■

Bemerkung 1.5.2 *Die parametrischen Monome u^i_J von $\hat{E_1}$ stimmen mit denen von E überein, für die Funktion $w(x^1,\ldots,x^n)$ ist die Menge der zugehörigen parametrischen Monome mit w selbst identisch, falls E keine lpdgl enthält, die nur aus dem konstanten Term besteht. Enthält E aber ein $e \in E$, das nur aus dem konstanten Term besteht, so existieren nur prinzipale Monome für w.*

Satz 1.5.5 *Es sei E eine Janet-Basis von in einem Punkt $\mathbf{x_0} \in \mathbb{C}^n$ analytischen lpdgl in den Funktionen $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\ldots,m$ bezüglich einer totdeg–Matrixtermordnung $<$. Die $e \in E$ brauchen nicht homogen zu sein, es seien aber keine $E \ni e = -b$ enthalten, die nur aus dem konstanten Glied bestehen. Dann existiert für jedes System von in $\mathbf{x_0}$ analytischen $w^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\ldots,m$ eine eindeutige Lösung $\bar{u}^i(\underline{x})$ von E, analytisch in $\mathbf{x_0}$ und mit $D_J w^i(\mathbf{x_0}) = D_J \bar{u}^i(\mathbf{x_0})$ für alle parametrischen Monome u^i_J.*

Beweis. Man bilde die mit einer Funktion $w(x^1,\ldots,x^n)$ homogenisierte Janet–Basis $\hat{E_1}$ wie in Satz 1.5.4. Sie erfüllt die Voraussetzungen des Theorems von Riquier 1.5.1, wobei ihre parametrischen Monome in den u^i mit denen von E übereinstimmen und das Monom w für die Funktion $w(x^1,\ldots,x^n)$ parametrisch ist (Bemerkung 1.5.2).

Da $\hat{E_1}$ für $w(\underline{x}) = 1$ in E übergeht, gibt es eine 1-1–Korrespondenz zwischen den Lösungen $\bar{u}^i_1(\underline{x})$, $w(\underline{x})$ von $\hat{E_1}$, analytisch um $\mathbf{x_0}$ und mit $D_J w^i(\mathbf{x_0}) = D_J \bar{u}^i_1(\mathbf{x_0})$ sowie $w(\mathbf{x_0}) = 1$ und den Lösungen $\bar{u}^i(\underline{x})$ von E, analytisch um $\mathbf{x_0}$ und mit $D_J w^i(\mathbf{x_0}) = D_J \bar{u}^i(\mathbf{x_0})$, unter der $\bar{u}^i_1(\underline{x}) = \bar{u}^i(\underline{x})$ ist.

Da $\hat{E_1}$ um $\mathbf{x_0}$ die Voraussetungen des Theorems von Riquier erfüllt liefert die obige 1-1–Korrespondenz die behauptete eindeutige Lösung von E um $\mathbf{x_0}$. ■

Satz 1.5.6 *Es sei E eine Janet–Basis von in einem Punkt $\mathbf{x_0} \in \mathbb{C}^n$ analytischen lpdgl in den Funktionen $u^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\ldots,m$. Die $e \in E$ brauchen nicht homogen zu sein, es seien aber keine $E \ni e = -b$ enthalten, die nur aus dem konstanten Glied bestehen.*

Weiter sei $\mathbb{P}(E) = \{u^{i_\nu}_{K_\nu}\}_{\nu=1,\ldots,N}$ die endliche Menge der parametrischen Monome von E und es sei $w_\nu \in \mathbb{C}$ ($\nu = 1,\ldots,N$) vorgegeben. Dann existiert eine eindeutige, in $\mathbf{x_0}$ analytische Lösung $\bar{u}^i(\underline{x})$ von E mit $\bar{u}^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = w_\nu$ für $\nu = 1,\ldots,N$.

Beweis. Wie Satz 1.5.5 nur unter Verwendung von Satz 1.5.3 anstelle des Theorems von Riquier. ■

Bemerkung 1.5.3 *Die Lösungen einer nicht notwendig homogenen Janetbasis in einer gegebenen Algebra über ihrem Koeffizientenkörper bilden affine Teilräume dieser Algebra.*

In dem Satz 1.5.5 ist dies die Algebra $\mathbb{C}[[x^1 - x^1_0,\ldots,x^n - x^n_0]]$ mit einem affinen Lösungraum, der isomorph zum Vektorraum der Potenzreihen $(w^i(\underline{x}))_{i=1,\ldots,m}$, analytisch in $\mathbf{x_0}$, mit $D_J w^i(\mathbf{x_0}) = 0$ für alle prinzipalen u^i_J.

In Satz 1.5.6 ist dies ebenfalls die Algebra $\mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]$ mit einem affinen Lösungsraum der isomorph zum Raum $\mathbb{C}^N$ der Abbildungen von den parametrischen Monomen nach $\mathbb{C}$ ist.

Wir wollen nun noch den Satz von Riquier für einen wichtigen Typ von Koeffizientenkörpern formulieren, nämlich die Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$ aus Abschnitt 1.3.1. Für diese gilt

Satz 1.5.7 *Es sei E eine Janet–Basis von lpdgl über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$ ($U \subseteq \mathbb{C}^n$) in den Funktionen $u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, m$ bezüglich einer totdeg–Matrixtermordnung. Die $e \in E$ brauchen nicht homogen zu sein, es seien aber keine $E \ni e = -b$ enthalten, die nur aus dem konstanten Glied bestehen.*

Dann existiert eine in U vernachlässigbare Teilmenge A, so daß man für alle $\mathbf{x}_0 \in U - A$ und $w^i(\underline{x})$, $i = 1, \ldots, m$, analytisch im Punkt $\mathbf{x}_0$, eine offene Umgebung V mit $\mathbf{x}_0 \in V \subseteq U - A$ wählen kann, auf der eine eindeutige analytische Lösung $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{O}(V)$ von E existiert, für die $D_J \bar{u}^i(\mathbf{x}_0) = D_J w^i(\mathbf{x}_0)$ für alle parametrischen Monome u^i_J ist.

Beweis. Es sei C die Gesamtheit der Koeffizienten von allen $e \in E$. Jedes $c \in C$ ist auf einer offenen Menge $U - A_c$ holomorph, wobei A_c vernachlässigbar in U ist. Die endliche Vereinigung $A = \bigcup_{c \in C} A_c$ ist ebenfalls vernachlässigbar und auf $U - A$ sind alle $c \in C$ holomorph. Nach Satz 1.5.5 existiert dann für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in U - A$ eine eindeutige, lokal um $\mathbf{x}_0$ analytische Lösung $\bar{u}^i(\mathbf{x})$ von E mit $\bar{u}^i_J(\mathbf{x}_0) = w^i_J(\mathbf{x}_0)$ für die parametrischen Monome $\bar{u}^i_J$. Da $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m$ eine lokal analytische Lösung im Punkt $\mathbf{x}_0$ ist, gibt es auch eine offene Gebietsumgebung $V \subseteq U - A$ von $\mathbf{x}_0$, so daß $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m$ als holomorphe Funktionen auf V eine Lösung von E darstellen. Dabei wird $\mathcal{O}(V)$ als Teil von $\mathcal{K}(V)$ aufgefasst, das seinerseits eine $\mathcal{K}(U)$ Funktionenalgebra über die Restriktionsabbidung $r_{UV} : \mathcal{K}(U) \to \mathcal{K}(V)$ ist. $\mathcal{K}(V)$ ist dann das S aus Definition 1.5.1. ■

Satz 1.5.8 *Es sei E eine Janet–Basis von lpdgl über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$ ($U \subseteq \mathbb{C}^n$, offenes Gebiet) in den Funktionen $u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, m$. Die $e \in E$ brauchen nicht homogen zu sein, es seien aber keine $E \ni e = -b$ enthalten, die nur aus dem konstanten Glied bestehen.*

Weiter sei $\mathbb{P}(E) = \{u^{i_\nu}_{K_\nu}\}_{\nu=1,\ldots,N}$ die endliche Menge der parametrischen Monome von E.

Dann existiert eine in U vernachlässigbare Teilmenge A, so daß man für alle $\mathbf{x}_0 \in U - A$ eine offene Umgebung V mit $\mathbf{x}_0 \in V \subseteq U - A$ wählen kann, auf der für jede Wahl von $w_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, \ldots, N$, eine eindeutige analytische Lösung $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{O}(V)$ von E existiert, für die $\bar{u}^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = w_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, N$ ist.

Die Lösungen von E in $\mathcal{O}(V)$ bilden also einen N–dimensionalen affinen Teilraum von $\mathcal{O}(V)^m$.

Weiterhin gilt für jedes $z \in V$ und jedes offene Gebiet $W \subseteq V$, daß die kanonischen Injektionen

(i) $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}_{V,z}$

(ii) $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(W)$

(iii) $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{K}(V)$

(iv) $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{K}(W)$

Isomorphismen

(i) $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E) \xrightarrow{\sim} Soln_{\mathcal{O}_{V,z}}(E)$

(ii) $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E) \xrightarrow{\sim} Soln_{\mathcal{O}(W)}(E)$

(iii) $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E) \xrightarrow{\sim} Soln_{\mathcal{K}(V)}(E)$

(iv) $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E) \xrightarrow{\sim} Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$

von komplexen affinen N–dimensionalen Räumen induzieren.

Beweis. Wie in Satz 1.5.7 wählt man ein $\mathbf{x_0}$, so daß alle Koeffizienten von E in $\mathbf{x_0}$ holomorph sind. Anschliessend bestimmt man $N+1$ Lösungen in $\mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]^m$ von E wie folgt: $\bar{u}_0^i$ sei die in $\mathbf{x_0}$ analytische Lösung, für die alle $(\bar{u}_0)^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = 0$ sind und $\bar{u}_\mu^i$, $\mu = 1, \ldots, N$ seien die N Lösungen von E, für die $(\bar{u}_\mu)^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = \delta_{\mu\nu}$ ist. Dann ist $\bar{u}^i = \bar{u}_0^i + \sum_\nu w_\nu(\bar{u}_\nu^i - \bar{u}_0^i)$ die eindeutig bestimmte Lösung in $\mathbb{C}[[x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n]]^m$ für die $\bar{u}^{i_\nu}_{K_\nu}(\mathbf{x_0}) = w_\nu$ ist.

Als V kann jedes offene Gebiet $V \ni \mathbf{x_0}$ gewählt werden, das in $U - A$ liegt und auf dem die $\bar{u}_0^i$ und $\bar{u}_\mu^i$ holomorph sind.

Nach Bemerkung 1.5.3 und Satz 1.5.6 ist $Soln_{\mathcal{O}_{V,z}}(E)$ ein N–dimensionaler affiner Raum in $\mathcal{O}^m_{V,z}$ (die Gleichungen von E sind in z analytisch !). Gleichzeitig bildet $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}_{V,z}$ den N–dimensionalen affinen Lösungsraum $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E)$ injektiv in $Soln_{\mathcal{O}_{V,z}}(E)$ ab. Wegen der Gleichheit der Dimensionen ist diese Injektion eine Bijektion und der Fall (i) von oben erledigt.

In den Fällen (ii), (iii), (iv) genügt es einzusehen, daß jedes $(v^1, \ldots, v^m) \in \mathcal{O}(W)^m, \mathcal{K}(V)^m, \mathcal{K}(W)^m$ auch Element von $\mathcal{O}^m_{V,z_0}$ für ein geeignetes $z_0 \in V$ ist. Damit ist jedes $(v^1, \ldots, v^m) \in Soln_{\mathcal{O}(W)}(E)$ auch Element von $Soln_{\mathcal{O}_{V,z_0}}(E)$ und damit von $Soln_{\mathcal{O}(V)}(E)$. Entsprechendes gilt auch für $\mathcal{K}(V)$ und $\mathcal{K}(W)$ anstelle von $\mathcal{O}(W)$. ■

Bemerkung 1.5.4 *Es sei E eine Janetbasis von lpdgl über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$ wie in Satz 1.5.7. Es sei $W \subseteq U$ ein offenes Gebiet und $Soln_{\mathcal{K}(W')}(E)$ ein N–dimensionaler komplexer affiner Raum für jedes offene Gebiet $W' \subseteq W$. Dann hat E genau N parametrische Monome.*

Beweis. Hätte E weniger als N parametrische Monome, so könnte $Soln_{\mathcal{K}(W')}(E)$ kein N–dimensionaler affiner Raum sein. Umgekehrt könnte man im Fall von mehr als N parametrischen Monomen mit der Methode vom Anfang des Beweises von Satz 1.5.8 ein $Soln_{\mathcal{K}(W')}(E)$ finden, das mehr als N affin unabhängige Funktionen enthält. ■

Als Konsequenz von Satz 1.5.8 beweisen wir noch einen Satz über die Konstanz der Anzahl parametrischer Monome in verschiedenen Janetbasen desselben Ideals von lpdgls:

Satz 1.5.9 *Es seien E und F zwei Janetbasen mit $(E) = (F)$ über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$, in den differentiellen Unbestimmten $u^1, \ldots, u^m$.*

Die Janetbasis E habe genau N parametrische Monome, dann hat auch F genau N parametrische Monome.

Beweis. Wähle für E ein V wie in Satz 1.5.8, so daß für jedes $W \subseteq V$, W offenes Gebiet, $Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ ein N–dimensionaler affiner Raum ist. Damit ist auch $Soln_{\mathcal{K}(W)}(F) = Soln_{\mathcal{K}(W)}((F)) = Soln_{\mathcal{K}(W)}((E)) = Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ ein N–dimensionaler affiner Raum.

Wenn nun F N' parametrische Monome hätte, mit $N' > N$, so gäbe es ein $W \subseteq V$, W offenes Gebiet, auf dem $Soln_{\mathcal{K}(W)}(F)$ ein N'–dimensionaler affiner Raum wäre. Dann wäre aber auch $Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ ein N'–dimensionaler affiner Raum, im Widerspruch zu obiger Wahl von V. Also ist $N' = N$. ■

1.5.4 Koordinatentransformationen von lpdgl und ihrer Lösungen

Es seien R bzw. S integre Differentialringe mit den Ableitungen ∂_{x^i} bzw. ∂_{y^i}, $i = 1, \ldots, n$, und $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus von gewöhnlichen Ringen.

Weiter seien $\bar{R}$ bzw. $\bar{S}$ R– bzw. S–Algebren vermöge von Homomorphismen $R \to \bar{R}$ bzw. $S \to \bar{S}$ und es sei $\bar{\phi} : \bar{R} \to \bar{S}$ ein Homomorphismus von gewöhnlichen Ringen.

Es seien $u^1, \ldots, u^r$ differentielle Unbestimmte zu den Derivationen ∂_{x^i} und $v^1, \ldots, v^s$ differentielle Unbestimmte zu den Derivationen ∂_{y^i}.

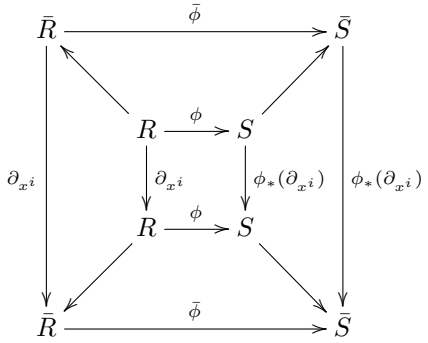
Schließlich seien Abbildungen

$$\phi_*(u^i) = \sum b^i_{kL} v^k_L \tag{1.141}$$

und

$$\phi_*(\partial_{x^i}) = \sum \alpha^j_i \partial_{y^j}, \quad \alpha^j_i \in S, \quad \det(\alpha^j_i) \neq 0 \tag{1.142}$$

gegeben und das Diagramm



(1.143)

kommutiere.

Dann existiert wie in Abschnitt 1.3.2 beschrieben eine Abbildung

$$\phi_* : \mathcal{L}(R, u^i) \longrightarrow \mathcal{L}(S, v^j) \tag{1.144}$$

die als Koordinatentransformation angesehen werden kann.

Diese Abbildung ist

$$\begin{aligned} \phi_* \left(\sum a_{iJ} u^i_J \right) &= \phi_* \left(\sum a_{iJ}\, \partial^{j_1}_{x^1} \cdot \cdots \cdot \partial^{j_n}_{x^n} u^i \right) \\ &= \sum \phi(a_{iJ}) \phi_* \left(\partial_{x^1}\right)^{j_1} \cdot \cdots \cdot \phi_* \left(\partial_{x^n}\right)^{j_n} \phi_*(u^i) \\ &= \sum \phi(a_{iJ})\, \phi_* \left(\partial_{x^1}\right)^{j_1} \cdot \cdots \cdot \phi_* \left(\partial_{x^n}\right)^{j_n} b^i_{kL} v^k_L \end{aligned} \tag{1.145}$$

Satz 1.5.10 *Die Bezeichnungen seien wie oben und es sei $E \subseteq \mathcal{L}(R, u^i)$ ein System von lpdgl und $\phi_* E = \{\phi_*(e) | e \in E\}$ sein Bild unter ϕ_*.*

Weiter sei $(\bar{u}^i) \in \bar{R}^r$ und $(\bar{v}^j) \in \bar{S}^s$ mit $\bar{\phi}(\bar{u}^i) = \sum b^i_{kL} \bar{v}^k_L$. Dann ist

$$(\bar{u}^i) \in Soln_{\bar{R}}(E) \Rightarrow (\bar{v}^j) \in Soln_{\bar{S}}(\phi_* E) \tag{1.146}$$

und wenn p$\bar{h}$i injektiv ist, sogar

$$(\bar{u}^i) \in Soln_{\bar{R}}(E) \Leftrightarrow (\bar{v}^j) \in Soln_{\bar{S}}(\phi_* E) \tag{1.147}$$

Beweis. Aus (1.145) und (1.143) folgt, daß

$$\phi_*(e)[v^j = \bar{v}^j] = \bar{\phi}(e[u^i = \bar{u}^i]) \tag{1.148}$$

für $\bar{\phi}(\bar{u}^i) = \sum b^i_{kL} \bar{v}^k_L$. Damit ist alles gezeigt. ■

Satz 1.5.11 *Die Bezeichnungen seien wie oben, und es sei* $r = s$ *und* $\phi_*(u^i) = \sum b^i_j\, v^j$, $b^i_j \in S$ *mit* $\det(b^i_j) \in S^*$.

Dann induziert

$$\phi_\sharp : \bar{R}^r \to \bar{S}^s \tag{1.149}$$

festgelegt durch $\phi_\sharp((\bar{u}^i)) = (\bar{v}^j)$ *mit* $\bar{\phi}(\bar{u}^i) = \sum b^i_j\, \bar{v}^j$ *einen Homomorphismus*

$$\phi_* : Soln_{\bar{R}}(E) \to Soln_{\bar{S}}(\phi_* E) \tag{1.150}$$

der injektiv resp. bijektiv ist, wenn $\bar{\phi}$ *es ist.*

Beweis. Folgt direkt aus vorigem Satz. ■

Im folgenden betrachten wir einen konkreten Spezialfall der oben angeführten Sätze, nämlich zwei offene Gebiete $U, \bar{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, die durch eine biholomorphe Abbildung $\sigma : \bar{U} \longrightarrow U$ aufeinander bezogen sind.

Weiter seien $W \subseteq U$, $\bar{W} \subseteq \bar{U}$ zwei offene Gebiete mit $\sigma(\bar{W}) = W$.

Dann induziert σ Abbildungen $\sigma^* : \mathcal{K}(U) \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{U})$ und $\sigma_1^* : \mathcal{K}(W) \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{W})$ wie in Lemma 1.3.2 beschrieben.

Die Differentialringe R, S, $\bar{R}$, $\bar{S}$ seien $\mathcal{K}(U)$, $\mathcal{K}(\bar{U})$, $\mathcal{K}(W)$, $\mathcal{K}(\bar{W})$ und es sei wie in Satz 1.5.11 $\phi_*(u^i) = \sum b^i_j\, v^j$ mit $b^i_j \in \mathcal{K}(\bar{U})$. Die Abbildungen ϕ und $\bar{\phi}$ von oben werden dann durch die Isomorphismen σ^* und σ_1^* gegeben, und es ist $\phi_*\left(\partial_{x^i}\right) = \sum_j \left((\frac{\partial \sigma^i}{\partial \bar{x}^j})_{ij} \right)^{-1} \partial_{\bar{x}^j}$, wobei x^i die Koordinaten in U und $\bar{x}^j$ die Koordinaten in $\bar{U}$ sein sollen.

Die Abbildung (1.150) ist unter diesen Bedingungen ein Isomorphismus.

Satz 1.5.12 *Die Bezeichnungen seien wie eben eingeführt, und es sei* E *eine homogene Janetbasis,* $E \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}(U), u^i)$*, mit endlich vielen parametrischen Ableitungen.*

Weiter sei $F = J(\phi_* E)$ *eine Janetbasis der Transformierten der Gleichungen aus* E*. Dann hat* F *dieselbe endliche Anzahl* N *von parametrischen Ableitungen wie* E*.*

Beweis. Wir wählen $V \subseteq U$ so, daß die Aussagen von Satz 1.5.8 für E zutreffen. Wähle nun weiter ein beliebiges offenes Gebiet $\bar{V}' \subseteq \bar{V}$ und finde $V' \subseteq V$ mit $\sigma(\bar{V}') = V'$. Dann ist

$$\mathrm{S}oln_{\mathcal{K}(\bar{V}')}(F) = \mathrm{S}oln_{\mathcal{K}(\bar{V}')}(\phi_* E) \cong \mathrm{S}oln_{\mathcal{K}(V')}(E) = \mathrm{S}oln_{\mathcal{K}(V)}(E) \tag{1.151}$$

Also ist $\mathrm{S}oln_{\mathcal{K}(\bar{V}')}(F)$ ein N–dimensionaler komplexer Vektorraum für jedes offene Gebiet $\bar{V}' \subseteq \bar{V}$. Nach Bemerkung 1.5.4 hat F deshalb genau N parametrische Ableitungen. ■

1.6 Anwendungen der Janetbasen von lpdgl

1.6.1 Eliminationstheorie

Im Rahmen der Eliminationstheorie betrachten wir lpdgl in zwei Gruppen von differentiellen Unbestimmten, $u^1, \ldots, u^m$ und $v^1, \ldots, v^r$ (die von $x^1, \ldots, x^n$ abhängen sollen).

Die Grundaufgabe der Eliminationstheorie besteht darin, für ein vorgelegtes System E von lpdgl in u^i und v^j alle diejenigen lpdgl in den u^i allein zu finden, die aufgrund des Bestehens von E zu gelten haben. Dies nennt man auch die *Elimination der* v^j *aus* E. Die Lösung dieser Aufgabe wird in Satz 1.6.1 gegeben. Vorher führen wir einige Begriffe und Bezeichnungen ein:

Definition 1.6.1 *Seien $u^1, \ldots, u^m$ und $v^1, \ldots, v^r$ zwei Systeme von differentiellen Unbestimmten (zu den unabhängigen Veränderlichen $x^1, \ldots, x^n$). Eine Termordnung $<$ für die $u^i_J < v^j_K$ für alle i, J, j, K ist, heiße* Eliminationstermordnung

Bezeichnung 1.6.1 *Es sei $\mathcal{L}(K, u^i, v^j)$ die Menge der lpdgl über dem Differentialkörper K in den differentiellen Unbestimmten $u^1, \ldots, u^m$ und $v^1, \ldots, v^r$ (zu den unabhängigen Veränderlichen $x^1, \ldots, x^n$). Entsprechend seien $\mathcal{L}(K, u^i)$ und $\mathcal{L}(K, v^j)$ definiert.*

$<_{elim}$ sei eine Eliminationstermordnung mit $u^i_J <_{elim} v^j_K$.

E sei ein System von lpdgl, $E \subseteq \mathcal{L}(K, u^i, v^j)$. $F = \mathcal{J}(E)$ sei die Janetbasis von E bezüglich $<_{elim}$.

F_u sei $F \cap \mathcal{L}(K, u^i)$, die Menge der $f \in F$, deren Differentialmonome nur aus den u^i_J und $\mathbf{1}$ bestehen.

Die Menge $F - F_u$ die aus den $f \in F$ besteht, die wenigstens ein v^j_K als Differentialmonom enthalten, wollen wir mit F_v bezeichnen.

Es sei L/K eine differentielle K–Algebra. Für $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in L$ und $f \in \mathcal{L}(K, u^i, v^j)$ sei $f[u^i = \bar{u}^i] \in \mathcal{L}(L, v^j)$ die lpdgl, die aus f entsteht, wenn u^i_J in f durch $\bar{u}^i_J \in L$ ersetzt wird.

Für $E \subseteq \mathcal{L}(K, u^i, v^j)$ sei $E[u^i = \bar{u}^i] = \{e[u^i = \bar{u}^i] | e \in E\}$, $F_v[u^i = \bar{u}^i]$ wollen wir auch mit $F_{v,\bar{u}}$ abkürzen.

Lemma 1.6.1 *In den Bezeichnungen von 1.6.1 gilt*

$$f \in F_v \Longleftrightarrow lmon(f) = v^j_K \tag{1.152}$$

Beweis.
$\Leftarrow$: klar.
$\Rightarrow$: Wäre das Leitmonom ein u^i_J, aber trotzdem ein v^j_K als Monom in f enthalten, so müsste $v^j_K <_{\text{elim}} u^i_J$ sein, was der Definition von $<_{\text{elim}}$ widerspricht. ■

Satz 1.6.1 *Es seien die Bezeichnungen wie in Bezeichnung 1.6.1. Dann gilt*

$$(E) \cap \mathcal{L}(K, u^i) = (F) \cap \mathcal{L}(K, u^i) = (F_u) \tag{1.153}$$

und F_u ist eine Janetbasis von $(F) \cap \mathcal{L}(K, u^i)$ bezüglich der Einschränkung von $<_{elim}$ auf die u^i_J.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß F_u ein Janetbasis bildet.

Die F_u sind als Teil der autoreduzierten und normierten Janetbasis F selbst autoreduziert und normiert, es bleibt also nur zu zeigen, daß $\text{igb}_1(f_1, f_2) \xrightarrow{F_u *} 0$ für alle $f_1, f_2 \in F_u$. Auch das ist aber offensichtlich, denn zunächst gilt ja wegen der Passivität von F $\text{igb}_1(f_1, f_2) \xrightarrow{F *} 0$. Dabei muß aber jeder Reduktionsschritt mit einem $f \in F_u$ ausgeführt werden, denn jedes $f \in F - F_u$ hat ein Leitmonom aus den v^i_J (Lemma 1.6.1). Somit muß der erste Reduktionsschritt mit einem $f \in F_u$ erfolgen, und das Ergebnis der Reduktion ist erneut aus F_u. Induktiv folgt die Behauptung.

Was Gleichung (1.153) angeht, so folgt $(E) = (F)$ aus $F = \mathcal{J}(E)$ und somit ist die erste Gleichung von (1.153) gezeigt. Nach Korollar 1.4.3 ist $f \in (F)$ genau dann, wenn $f \xrightarrow{F *} 0$. Sei nun $f \in (F) \cap \mathcal{L}(F, u^i)$, so müssen die Reduktionsschritte in $f \xrightarrow{F *} 0$ kraft des oben ins Feld geführten Arguments mit $f_i \in F_u$ ausgeführt werden, also $f \xrightarrow{F_u *} 0$ sein.

Nach Korollar 1.4.2 ist dann aber $f \in (F_u)$. Damit ist $(F) \cap \mathcal{L}(F, u^i) \subseteq (F_u)$ gezeigt, die umgekehrte Richtung ist offensichtlich.

Da F_u eine Janetbasis ist, ist sie auch Janetbasis von $(F_u) = (F) \cap \mathcal{L}(F, u^i)$.

■

Bemerkung 1.6.1 *Wenn F (in den Bezeichnungen von Bezeichnung 1.6.1) eine Janetbasis mit endlich vielen parametrischen Monomen ist, so gilt dies auch für F_u und $F_{v,\bar{u}}$ aufgefaßt als Janetbasen in den u^i bzw. v^j.*

Im folgenden sei der oben mit K bezeichnete Koeffizientenkörper gleich $\mathcal{K}(U)$ für ein offenes Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Nachdem wir in Satz 1.6.1 geklärt haben, wie man aus einem System E von lpdgl die differentiellen Unbestimmten v^j eliminieren kann, wollen wir uns nun der Frage zuwenden, ob für jede Lösung $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{K}(V)$ von F_u $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r \in \mathcal{K}(W)$ gefunden werden können, so daß $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m, \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r$ eine Lösung von F darstellen. Dabei sollen W und V offene Gebiete mit $W \subseteq V \subseteq U$ sein und $\mathcal{K}(V)$ als $\mathcal{K}(U)$–Algebra sowie $\mathcal{K}(W)$ als $\mathcal{K}(V)$–Algebra aufgefaßt werden.

Zu diesem Zweck beweisen wir erst einmal das folgende Lemma:

Lemma 1.6.2 *In den Bezeichnungen von Bezeichnung 1.6.1 sei $e \xrightarrow{F^*} N_1(e)$, wobei $N_1(e)$ die Endform von e bezüglich F für ein $e \in \mathcal{L}(K, u^i, v^j)$ sei.*

Dann existiert ein $e_v \in \mathcal{L}(K, u^i, v^j)$ mit $e \xrightarrow{F_v^*} e_v \xrightarrow{F_u^*} N_1(e)$ und es ist $e_v \in \mathcal{L}(K, u^i)$ bzw. $e_v \in (F_u)$ für $N_1(e) \in \mathcal{L}(K, u^i)$ bzw. $N_1(e) \in (F_u)$.

Beweis. Man bilde eine Reduktionskette $e \xrightarrow{f_1} e_1 \xrightarrow{f_2} \cdots , \xrightarrow{f_r} e_r$ mit $f_i \in F_v$, so daß e_r bezüglich F_v nicht weiter reduzierbar ist. Nach Lemma 1.4.1 existiert eine solche endliche Kette stets. Setze nun $e_v = e_r$. Da $\xrightarrow{F}$ konfluent ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{F} & {}^*N_1(e) \\ & {\scriptstyle F_v}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle F} & \\ & {}^*e_v & \end{array} \qquad (1.154)$$

In der darin enthaltenen Reduktionskette $e_v \xrightarrow{F^*} N_1(e)$ treten aber nur Reduktionen mit $f \in F_u$ auf, wie man induktiv einsieht. Das erste Glied, e_v, ist nämlich nur mit $f_1 \in F_u$ reduzierbar. Es sei also $e_v \xrightarrow{f_1} e_{v,1}$. Dann enthält $e_{v,1}$ höchstens u_J^i als neue Differentialmonome, neue v_K^j treten nicht hinzu. Also ist auch $e_{v,1}$ nur mit F_u reduzierbar usw. Das Diagramm (1.154) kann also geschrieben werden als

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{F} & {}^*N_1(e) \\ & {\scriptstyle F_v}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle F_u} & \\ & {}^*e_v & \end{array} \qquad (1.155)$$

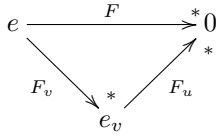
Nach Lemma 1.4.13 gilt somit $e_v - N_1(e) \in (F_u)$, also ist für $N_1(e) \in \mathcal{L}(K, u^i)$ bzw. $N_1(e) \in (F_u)$ auch $e_v \in \mathcal{L}(K, u^i)$ bzw. $e_v \in (F_u)$. ■

Satz 1.6.2 *In den Bezeichnungen von Bezeichnung 1.6.1 sei $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{K}(V)$ eine Lösung des Systems F_u von lpdgl. Dann ist $F_v[u^i = \bar{u}^i] = F_{v,\bar{u}}$ eine Janetbasis von lpdgl aus $\mathcal{L}(\mathcal{K}(V), v^j)$.*

Beweis. Zunächst einmal kann F als Janetbasis über dem Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(V) \supseteq \mathcal{K}(U)$ aufgefaßt werden, da die Janetbasis–Eigenschaft unter Erweiterungen des Koeffizientenkörpers erhalten bleibt. Da F autoreduziert und normiert ist, ist es auch $F_v \subseteq F$ und offensichtlich auch $F_{v,\bar{u}}$, da die Differentialmonome v_K^j in den lpdgl von $F_{v,\bar{u}}$ mit denen in den lpdgl von F_v übereinstimmen.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{igb}_1(f_1', f_2') \xrightarrow{F_{v,\bar{u}}^*} 0$ für alle $f_1', f_2' \in F_{v,\bar{u}}$. Wir kürzen im folgenden $f[u^i = \bar{u}^i]$ mit $\bar{f}$ ab. Es ist dann also $f_1' = \bar{f}_1$, $f_2' = \bar{f}_2$ für $f_1, f_2 \in F_v$

geeignet. Mit e bezeichnen wir $\mathrm{igb}_1(f_1, f_2) = e$. Es gilt dann nach Lemma 1.6.2



(1.156)

Ebenfalls nach Lemma 1.6.2 ist dann $e_v \in (F_u)$, also $\overline{e_v} = 0$. Schreiben wir die Reduktion $e \xrightarrow{F_v *} e_v$ in (1.156) ausführlich als

$$\mathrm{igb}_1(f_1, f_2) = e = e_0 \xrightarrow{f_1} e_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_s} e_s = e_v, \quad f_i \in F_v \tag{1.157}$$

so gilt nach Einsetzen $u^i = \bar{u}^i$ in (1.157)

$$\overline{\mathrm{igb}_1(f_1, f_2)} = \bar{e} = \overline{e_0} \xrightarrow{\overline{f_1}} \overline{e_1} \xrightarrow{\overline{f_2}} \cdots \xrightarrow{\overline{f_s}} \overline{e_s} = \overline{e_v} = 0, \quad \overline{f_i} \in F_{v,\bar{u}} \tag{1.158}$$

Weiter ist offensichtlich

$$\overline{\mathrm{igb}_1(f_1, f_2)} = \mathrm{igb}_1(\overline{f_1}, \overline{f_2}) = \mathrm{igb}_1(f_1', f_2') \tag{1.159}$$

Nimmt man (1.159) und (1.158) zusammen, so folgt

$$\mathrm{igb}_1(f_1', f_2') \xrightarrow{F_{v,\bar{u}} *} 0 \tag{1.160}$$

was zu beweisen war. ■

Satz 1.6.3 *Es gelten die Bezeichnungen von oben und es sei $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{K}(V)$ eine Lösung von F_u. Weiter sei die zugrundeliegende Eliminationstermordnung $<$ so gewählt, daß ihre Einschränkung auf die v_K^j eine totdeg–Matrixtermordnung ist, falls F unendlich viele parametrische Monome hat.*

Dann existieren $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r \in \mathcal{K}(W)$, für ein geeignetes offenes Gebiet $W \subseteq V$, so daß $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m, \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r \in \mathcal{K}(W)$ eine Lösung von F (und damit von $(F) = (E)$) darstellt (dabei sind die $\bar{u}^i$ kraft der kanonischen Injektion $\mathcal{K}(V) \subseteq \mathcal{K}(W)$ als Elemente von $\mathcal{K}(W)$ aufzufassen).

Beweis. Nach Satz 1.6.2 und der Annahme über $<$ ist $F_{v,\bar{u}}$ eine Janetbasis von lpdgl aus $\mathcal{L}(\mathcal{K}(V), v^j)$ bezüglich der Termordnung, die durch Einschränkung von $<$ auf die v_K^j entsteht. $F_{v,\bar{u}}$ enthält keine lpdgl, die nur aus dem konstanten Glied besteht, da eine solche bereits in F_u enthalten wäre und F_v entweder die leere Menge ist, oder aus lpdgl besteht, deren Leitmonom ein v_K^j ist. Also existieren nach Satz 1.5.7 im Fall, daß F unendlich viele parametrische Monome hat, bzw. nach Satz 1.5.8 im Fall, daß F und damit $F_{v,\bar{u}}$ nur endlich viele parametrische Monome hat, $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r \in \mathcal{K}(W)$, die eine Lösung von $F_{v,\bar{u}}$ darstellen. $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m$ und $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^r$ bilden dann zusammen eine Lösung von F im Körper $\mathcal{K}(W)/\mathcal{K}(U)$. ■

Eine wichtige Anwendung von Satz 1.6.3 besteht in folgender Überlegung: Es sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ein offenes Gebiet und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}(U)^m$ ein komplex r–dimensionaler Vektorraum von m–Vektoren über $\mathcal{K}(U)$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u^1, \ldots, u^m) \,|\, u^i \in \mathcal{K}(U), u^i = \sum_{j=1}^{r} c^j f_j^i, c^j \in \mathbb{C}, f_j^i \in \mathcal{K}(U) \right\} \tag{1.161}$$

Dann lässt sich $\mathcal{E}$ als Lösungen eines Systems von lpdgl in den u_J^i über dem Körper $\mathcal{K}(U)$ kennzeichnen.

Satz 1.6.4 *Die Bezeichnungen seien wie oben, dann existiert eine Janetbasis $F_{\mathcal{E}}$ von lpdgl aus $\mathcal{L}(\mathcal{K}(U), u^i)$, so daß*

$$(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow f[u^i = \bar{u}^i] = 0 \quad \textit{für alle } f \in F_{\mathcal{E}} \tag{1.162}$$

Beweis. Wir betrachten das System E von lpdgl in den u^i und den c^j über $\mathcal{K}(U)$

$$u^i - \sum_{j=1}^{r} c^j f_j^i = 0 \tag{1.163}$$

$$c^j_{x^i} = 0 \tag{1.164}$$

das bezüglich einer Eliminationstermordnung mit $c^j < u^i$ offenbar eine Janetbasis mit r parametrischen Monomen ist.

Es sei F eine Janetbasis $F = \mathcal{J}(E)$ bezüglich einer Eliminationstermordnung mit $u^i_J < c^j_K$, F hat damit ebenfalls r parametrische Monome. Die Janetbasis F_u ist dann die gesuchte Janetbasis $F_{\mathcal{E}}$.

Sei nämlich $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m \in \mathcal{K}(V)$, $V \subseteq U$, eine Lösung von F_u, so existieren nach Satz 1.6.3 auch $\bar{c}^1, \ldots, \bar{c}^r \in \mathcal{K}(W)$, $W \subseteq V$, die zusammen mit den $\bar{u}^i$ F erfüllen, also auch $(F) = (E)$, also auch E.

Die $\bar{c}^j$ sind vorderhand nur $\in \mathcal{K}(W)$, aber in Wirklichkeit sind sie sogar $\in \mathbb{C}$. Sei nämlich A_i die vernachlässigbare Teilmenge von W, so daß auf $U - A_i$ $\bar{c}^j_{x^i} \equiv 0$ als holomorphe Funktion gilt (Gl. (1.164)), so ist auf $W - A$, $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $\bar{c}^j_{x^i} \equiv 0$ als holomorphe Funktion für alle $i = 1, \ldots, n$, also $\bar{c}^j = c^j \in \mathbb{C}$ konstant auf $W - A$. Da A vernachlässigbar ist, ist $c^j \in \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte analytische Fortsetzung von $W - A$ nach W der Funktion $\bar{c}^j \in \mathcal{K}(W)$.

Legt man diese so erhaltenen $c^j \in \mathbb{C}$ zu Grunde, so bedeutet das Erfülltsein der Gleichung (1.163) von E (über dem Körper $\mathcal{K}(W)$), daß $(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m) \in \mathcal{K}(W)^m$ die Einschränkung eines Vektors $(\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^m) \in \mathcal{E}$ ist. Damit ist „$\Leftarrow$ “in (1.162) gezeigt.

Sei nun umgekehrt $(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m) \in \mathcal{E}$ gegeben. Dann existieren nach Definition (1.161) von $\mathcal{E}$ $c^1, \ldots, c^r \in \mathbb{C}$, so daß die lpdgl (1.163) erfüllt sind. Die Gleichungen (1.164) sind erfüllt, da die c^j konstant sind. Also ist E erfüllt und damit auch (E). Da $(E) = (F)$ erfüllen diese $\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m$ und $c^1, \ldots, c^r$ auch (F), also F, also auch F_u, womit „$\Rightarrow$ “gezeigt ist. ■

1.6.2 Multilineare Kombinationen

Es seien $E \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}(U), u^1, \ldots, u^m)$ und $F \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}(U), v^1, \ldots, v^n)$, $U \subseteq \mathbb{C}^r$ offenes Gebiet, zwei Systeme von homogenen lpdgl.

Die Janetbasen von E und F seien $E' = \mathcal{J}(E)$ und $F' = \mathcal{J}(F)$. E' und F' mögen genau die endlich vielen parametrischen Monome $\mathbb{P}(E') = \{u^{i_a}_{J_a}\}_{1 \le a \le M}$ und $\mathbb{P}(F') = \{v^{j_b}_{K_b}\}_{1 \le b \le N}$ besitzen.

Weiter sei $V \subseteq U$ ein offenes Gebiet, so daß für V und U die Annahmen von Satz 1.5.8 sowohl bezüglich E' als auch bezüglich F' gelten.

Satz 1.6.5 *Es gelten die oben eingeführten Bezeichnungen. Dann gibt es ein System G von lpdgl in den abhängigen Veränderlichen w^{ab}, $a = 1, \ldots, M$, $b = 1, \ldots, N$ und mit Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(U)$, so daß*

$$\mathit{Soln}_{\mathcal{K}(V)}(E) \otimes \mathit{Soln}_{\mathcal{K}(V)}(F) \cong \mathit{Soln}_{\mathcal{K}(V)}(G) \tag{1.165}$$

Beweis. Betrachte die Ausdrücke $u^i_J \otimes v^j_K$ und erkläre die Wirkung der Ableitung ∂_k durch

$$\partial_k(u^i_J \otimes v^j_K) = u^i_{J,k} \otimes v^j_K + u^i_J \otimes v^j_{K,k} \tag{1.166}$$

wobei $J, k = (j_1, \ldots, j_k + 1, \ldots, j_r)$ für $J = (j_1, \ldots, j_r)$ und analog K, k für K sei.

Setze weiter $w^{ab} = u^{i_a}_{J_a} \otimes v^{j_b}_{K_b}$, $u^{i_a}_{J_a} \in \mathbb{P}(E')$, $v^{j_b}_{K_b} \in \mathbb{P}(F')$, so daß

$$\partial_k w^{ab} = u^{i_a}_{J_a,k} \otimes v^{j_b}_{K_b} + u^{i_a}_{J_a} \otimes v^{j_b}_{K_b,k} \tag{1.167}$$

wird.

Dann läßt sich $u^{i_a}_{J_a,k}$ vermöge E' zu $\sum_{u^{i_c}_{J_c} \in \mathbb{P}(E')} \xi^{k,a}_c \, u^{i_c}_{J_c}$ reduzieren und ebenso $v^{j_b}_{K_b,k}$ vermöge F' zu $\sum_{v^{j_d}_{K_d} \in \mathbb{P}(F')} \eta^{k,b}_d \, v^{j_d}_{K_d}$.

Zusammengenommen folgt aus (1.167) und den durch E' und F' gegebenen Relationen

$$\begin{aligned} \partial_k w^{ab} &= \sum \xi^{k,a}_c \, u^{i_c}_{J_c} \otimes v^{j_b}_{K_b} \\ &\quad + \sum \eta^{k,b}_d \, u^{i_a}_{J_a} \otimes v^{j_d}_{K_d} \\ &= \sum \vartheta^{k,ab}_{cd} \, w^{cd} \end{aligned} \tag{1.168}$$

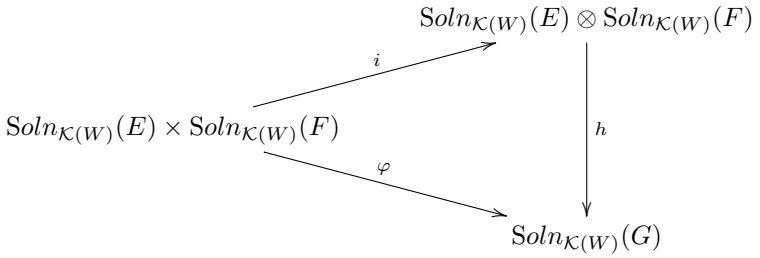
Die Gleichungen (1.168) bilden das System G.

Aus der Konstruktion von G folgt, daß für Lösungen $(\bar{u}^i)_i \in Soln_{\mathcal{K}(W)}(E') = Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ und $(\bar{v}^j)_j \in Soln_{\mathcal{K}(W)}(F') = Soln_{\mathcal{K}(W)}(F)$ das MN–Tupel $(\bar{w}^{ab} = \bar{u}^{i_a}_{J_a} \cdot \bar{v}^{j_b}_{K_b})_{ab}$ eine Lösung von G in $\mathcal{K}(W)$ darstellt. $W \subseteq V$ sei dabei ein beliebiges offenes Gebiet in V.

Genauer gilt, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} Soln_{\mathcal{K}(W)}(E) \times Soln_{\mathcal{K}(W)}(F) &\xrightarrow{\varphi} Soln_{\mathcal{K}(W)}(G) \\ \big((\bar{u}^i)_i, (\bar{v}^j)_j\big) &\longrightarrow (\bar{w}^{ab} = \bar{u}^{i_a}_{J_a} \cdot \bar{v}^{j_b}_{K_b})_{ab} \end{aligned}$$

eine $\mathbb{C}$–bilineare Abbildung von $\mathbb{C}$–Vektorräumen darstellt. Also induziert φ vermöge



einen $\mathbb{C}$-linearen Homomorphismus $h : Soln_{\mathcal{K}(W)}(E) \otimes Soln_{\mathcal{K}(W)}(F) \to Soln_{\mathcal{K}(W)}(G)$. Dieser ist aber sogar ein Isomorphismus.

Um das einzusehen wählen wir zunächst ein $\mathbf{x}_0 \in W$ aus und betrachten die Lösungen $\{(\bar{u}^i_\mu)_i\}_{1 \le \mu \le M} \subseteq Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ und $\{(\bar{v}^j_\nu)_j\}_{1 \le \nu \le N} \subseteq Soln_{\mathcal{K}(W)}(F)$ für die $(\bar{u}^{i_a}_\mu)_{J_a}(\mathbf{x}_0) = \delta^a_\mu$ und $(\bar{v}^{j_b}_\nu)_{K_b}(\mathbf{x}_0) = \delta^b_\nu$ gilt. Solche muß es nach Satz 1.5.8 stets geben und sie stellen sogar eine Basis von $Soln_{\mathcal{K}(W)}(E)$ bzw. $Soln_{\mathcal{K}(W)}(F)$ dar. Setzt man $(\bar{w}^{ab}_{\mu\nu})_{ab} = h((\bar{u}^i_\mu)_i \otimes (\bar{v}^j_\nu)_j)$, so erhält man wegen $\bar{w}^{ab}_{\mu\nu}(\mathbf{x}_0) = \delta^a_\mu \, \delta^b_\nu$ $M \cdot N$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängige Lösungen $(\bar{w}^{ab}_{\mu\nu})_{ab} \in Soln_{\mathcal{K}(W)}(G)$.

Es gilt also

$$\dim_{\mathbb{C}}(Soln_{\mathcal{K}(W)}(E) \otimes Soln_{\mathcal{K}(W)}(F)) = MN \tag{1.169}$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(h(Soln_{\mathcal{K}(W)}(E) \otimes Soln_{\mathcal{K}(W)}(F))) \ge MN \tag{1.170}$$

und wegen der Struktur von G

$$\dim_{\mathbb{C}} Soln_{\mathcal{K}(W)}(G) = \dim_{\mathbb{C}} Soln_{\mathcal{K}(W)}(G') \le MN \tag{1.171}$$

wobei G' eine Janetbasis von G bezüglich einer totdeg–Termordnung ist.

Also ist h ein Isomorphismus und G' mit G identisch. Würden nämlich in G' noch Integrabilitätsbedingungen zu den Gleichungen in G hinzutreten, so hätte G' echt weniger als MN parametrische Monome und es würde $\dim_{\mathbb{C}} Soln_{\mathcal{K}(W)}(G) < MN$ sein. ■

Bemerkung 1.6.2 *Für $V \subseteq U$ gelten die Aussagen von Satz 1.5.8 bezüglich der Janetbasis G.*

Im folgenden wollen wir — unter Beibehaltung der oben benutzten Bezeichnungen — die allgemeinen multilinearen Abbildungen

$$\begin{aligned} &Soln_{\mathcal{K}(V)}(E) \times Soln_{\mathcal{K}(V)}(F) \stackrel{t}{\to} \mathcal{K}(V)^p \\ &\qquad \big((\bar{u}^i)_i, (\bar{v}^j)_j\big) \longrightarrow (\bar{z}^k = \sum \eta^k_{iJjK} \bar{u}^i_J \cdot \bar{v}^j_K)_k, \quad k = 1, \ldots, p, \quad \eta^k_{iJjK} \in \mathcal{K}(V) \end{aligned} \tag{1.172}$$

untersuchen. Offensichtlich kann jede solche Abbildung t in eine äquivalente Form

$$\begin{aligned} &Soln_{\mathcal{K}(V)}(E) \times Soln_{\mathcal{K}(V)}(F) \stackrel{t}{\to} \mathcal{K}(V)^p \\ &\qquad \big((\bar{u}^i)_i, (\bar{v}^j)_j\big) \longrightarrow (\bar{z}^k = \sum_{u^{i_a}_{J_a} \in \mathbb{P}(E'), v^{j_b}_{K_b} \in \mathbb{P}(F')} \tilde{\eta}^k_{ab} \bar{u}^{i_a}_{J_a} \cdot \bar{v}^{j_b}_{K_b})_k, \end{aligned} \tag{1.173}$$

gebracht werden, indem man die Gleichungen aus E' und F' benutzt, um die $\bar{u}^i_J$ und $\bar{v}^j_K$ zu $\mathcal{K}(V)$–Linearkombinationen aus den parametrischen Ableitungen $u^{i_a}_{J_a}$ und $v^{j_b}_{K_b}$ zu reduzieren.

Aufgrund der $\mathbb{C}$–Bilinearität von (1.173) können wir das folgende kommutative Diagramm aufstellen

$$\begin{array}{ccc} Soln_{\mathcal{K}(V)}(E) \times Soln_{\mathcal{K}(V)}(F) & \xrightarrow{\quad t \quad} & \mathcal{K}(V)^p \\ \Big\downarrow i & \nearrow h & \Big\uparrow \psi \;\; \bar{z}^k = \sum \tilde{\eta}^k_{ab}\, \bar{w}^{ab} \\ Soln_{\mathcal{K}(V)}(E) \otimes Soln_{\mathcal{K}(V)}(F) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & Soln_{\mathcal{K}(V)}(G) \end{array} \tag{1.174}$$

Den von $t(Soln_{\mathcal{K}(V)}(E) \times Soln_{\mathcal{K}(V)}(F))$ erzeugten $\mathbb{C}$–Untervektorraum von $\mathcal{K}(V)^p$ wollen wir mit $\mathcal{E}$ bezeichnen.

In Satz 1.6.4 hatten wir gesehen, daß jeder solche lineare, endlichdimensionale Teilraum eines $\mathcal{K}(V)^p$ sich als Raum der Lösungen eines geeigneten Systems von lpdgl darstellen läßt, hier also als Lösungen eines Systems von lpdgl in den abhängigen Veränderlichen z^k, $k = 1, \ldots, p$ mit Koeffizientenkörper $\mathcal{K}(V)$.

Satz 1.6.6 *$\mathcal{E} = Soln_{\mathcal{K}(V)}(H''_1)$ für ein System $H''_1 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}(V), z^1, \ldots, z^p)$.*

Beweis. Die Gleichungen H

$$z^k - \sum \tilde{\eta}^k_{ab} w^{ab} = 0, \quad \in \mathcal{L}(\mathcal{K}(V), z^k, w^{ab}) \tag{1.175}$$

vereinigt mit den Gleichungen $G \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K}(V), w^{ab})$ bilden eine Janetbasis $H_1 = H \cup G$ bezüglich einer Termordnung mit $z^k_L > w^{ab}_J$.

Berechne nun die Janetbasis $H'_1 = \mathcal{J}(H_1)$ bezüglich einer Eliminationstermordnung $<$ mit $z^k_L < w^{ab}_J$ und nenne $H''_1 \subseteq H'_1$ die lpdgl, die nur Monome z^k_L enthalten. Dann ist $\mathcal{E} = Soln_{\mathcal{K}(V)}(H''_1)$.

Sei nämlich $(\bar{z}^k)_k \in \mathcal{E}$, so gibt es $(\bar{w}^{ab})_{ab} \in Soln_{\mathcal{K}(V)}(G)$ mit $\bar{z}^k = \sum \tilde{\eta}^k_{ab} \bar{w}^{ab}$, also erfüllen $(\bar{z}^k, \bar{w}^{ab})$ $H \cup G = H_1$, also $H'_1 = \mathcal{J}(H_1)$, also speziell die $\bar{z}^k$ $H''_1 \subseteq H'_1$.

Umgekehrt, sei $(\bar{z}^k)_k \in Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_1'')$, dann gibt es ein $W \subseteq V$, so daß für $\bar{z}^k|_W$ $\bar{w}^{ab} \in \mathcal{K}(W)$ existieren, mit denen $(\bar{z}^k|_W, \bar{w}^{ab}) \in Soln_{\mathcal{K}(W)}(H_1') = Soln_{\mathcal{K}(W)}(H_1)$ ist. Insbesondere erfüllen die $\bar{w}^{ab}$ auch G und wegen Bemerkung 1.6.2 lassen sie sich zu Lösungen $\bar{w}_1^{ab} \in \mathcal{K}(V)$, $\bar{w}_1^{ab}|_W = \bar{w}^{ab}$, von G über $\mathcal{K}(V)$ erweitern. Weiterhin erfülllen $\bar{z}^k|_W$ und $\bar{w}^{ab}$ auch H als Elemente von $\mathcal{K}(W)$ und somit erfüllen $\bar{z}^k, \bar{w}_1^{ab}$ H als Elemente von $\mathcal{K}(V)$. Damit ist aber $(\bar{z}^k)_k$ als $\in \mathcal{E}$ nachgewiesen. ■

Der Beweis von Satz 1.6.6 zeigt einen konstruktiven Weg zur Bestimmung von H_1'' auf, zu dem es aber auch noch eine — ebenfalls konstruktive — Alternative gibt.

Man geht dazu von den Gleichungen

$$\bar{z}^k = \sum \tilde{\eta}_{ab}^k \bar{u}_{J_a}^{i_a} \bar{v}_{K_b}^{j_b} \tag{1.176}$$

aus und betrachtet die $\bar{z}_I^k$ mit $I = (i_1, \ldots, i_r)$. Für sie ist

$$\bar{z}_I^k = \sum_{ab} \sum_{I_1+I_2+I_3=I} \varepsilon_{I_1 I_2 I_3}^I \left(\tilde{\eta}_{ab}^k\right)_{I_1} \bar{u}_{J_a+I_2}^{i_a} \bar{v}_{K_b+I_3}^{j_b} \quad , \varepsilon_{I_1 I_2 I_3}^I \in \mathbb{Z} \tag{1.177}$$

Da $\bar{u}^i$ bzw. $\bar{v}^j$ E' bzw. F' erfüllen, lassen sich $\bar{u}_{J_a+I_2}^{i_a}$ und $\bar{v}_{K_b+I_3}^{j_b}$ wieder zu $\mathcal{K}(V)$–Linearkombinationen der aus den parametrischen Monomen von E' bzw. F' gebildeten Ausdrücke $\bar{u}_{J_a}^{i_a}$ und $\bar{v}_{K_b}^{j_b}$ reduzieren:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{J_a+I_2}^{i_a} &= \sum_{u_{J_c}^{i_c} \in \mathbb{P}(E')} \zeta_c^{aI_2} \bar{u}_{J_c}^{i_c} \quad , \zeta_c^{aI_2} \in \mathcal{K}(V) \\ \bar{v}_{K_b+I_3}^{j_b} &= \sum_{v_{K_d}^{j_d} \in \mathbb{P}(F')} \zeta_d^{bI_3} \bar{v}_{K_d}^{j_d} \quad , \zeta_d^{bI_3} \in \mathcal{K}(V) \end{aligned} \tag{1.178}$$

zusammengenommen also

$$\bar{z}_I^k = \sum_{cd} \theta_{cd}^{kI} \bar{u}_{J_c}^{i_c} \bar{v}_{K_d}^{j_d} \quad , \theta_{cd}^{kI} \in \mathcal{K}(V) \tag{1.179}$$

mit

$$\theta_{cd}^{kI} = \sum_{I_1+I_2+I_3=I} \sum_{ab} \varepsilon_{I_1 I_2 I_3}^I \left(\tilde{\eta}_{ab}^k\right)_{I_1} \zeta_c^{aI_2} \zeta_d^{bI_3} \tag{1.180}$$

Wir wollen nun die $h = \sum_{k,|I| \leq MN} \lambda_{kI} z_I^k$, $\lambda_{kI} \in \mathcal{K}(V)$ bestimmen, für die $h[z^k = \bar{z}^k] = 0$ ist, für jedes $(\bar{z}^k)$, das sich aus beliebigen $(\bar{u}^i) \in Soln_{\mathcal{K}(V)}(E')$, $(\bar{v}^j) \in Soln_{\mathcal{K}(V)}(F')$ gemäß (1.176) ergibt.

Es muß also für solche $(\bar{u}^i)$, $(\bar{v}^j)$

$$\sum_{k,|I| \leq MN} \lambda_{kI} \bar{z}_I^k = \sum_{cd} \left(\sum_{k,I} \lambda_{kI} \theta_{cd}^{kI} \right) \bar{u}_{J_c}^{i_c} \bar{v}_{K_d}^{j_d} = 0 \tag{1.181}$$

sein.

Nun gibt es nach Satz 1.5.8 und den Annahmen über $V \subseteq U$, E' und F' für jedes $\mathbf{x}_0 \in V$ M Lösungen $(\bar{u}_{\mathbf{x}_0,\mu}^i)_i$, $\mu = 1, \ldots, M$ von E' und N Lösungen $(\bar{v}_{\mathbf{x}_0,\nu}^j)_j$, $\nu = 1, \ldots, N$, so daß $(\bar{u}_{\mathbf{x}_0,\mu}^{i_c})_{J_c}(\mathbf{x}_0) = \delta_\mu^c$ und $(\bar{v}_{\mathbf{x}_0,\nu}^{j_d})_{K_d}(\mathbf{x}_0) = \delta_\nu^d$ ist. Setzt man nun diese $\bar{u}_{\mathbf{x}_0,\mu}^i$, $\bar{v}_{\mathbf{x}_0,\nu}^j$ in (1.181) ein und wertet bei $\mathbf{x}_0$ aus, so ergibt sich als Bedingung an die λ_{kI} das $\mathcal{K}(V)$–lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k,|I| \leq MN} \lambda_{kI}(\mathbf{x}_0) \theta_{\mu\nu}^{kI}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad , \mu = 1, \ldots, M, \ \nu = 1, \ldots, N \tag{1.182}$$

Weitere Bedingungen entstehen nicht, da die $(\bar{u}^i_{\mathbf{x}_0,\mu})_i$ bzw. $(\bar{v}^j_{\mathbf{x}_0,\nu})_j$ jeweils eine Basis von $Soln_{\mathcal{K}(V)}(E')$ bzw. $Soln_{\mathcal{K}(V)}(F')$ darstellen.

Wähle nun eine $\mathcal{K}(V)$–Basis (λ^α_{kI}), $\alpha = 1, \ldots, A$ des Lösungsraumes von (1.182) und nenne H_2 das zugeordnete System von lpdgl in den z^k, $H_2 = \{\sum \lambda^\alpha_{kI}\, z^k_I | \alpha = 1, \ldots, A\}$.

Dann gilt

Satz 1.6.7

$$\mathcal{E} = Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_2) \tag{1.183}$$

Beweis. Es ist nämlich zunächst einmal jedes $h = \sum_{k,|I|\leq MN} \lambda_{kI}\, z^k_I$ für das $h[z^k = \bar{z}^k] = 0$ für alle $(\bar{z}^k) \in \mathcal{E}$ gilt, eine $\mathcal{K}(V)$–Linearkombination von Elementen aus H_2.

Wir zeigen nun, daß eine Janetbasis $H_1''' = \mathcal{J}(H_1'')$ von H_1'' aus Satz 1.6.6 bezüglich einer totdeg–Termordnung nur aus Elementen $h \in H_1'''$ besteht, die nur z^k_I mit $|I| \leq MN$ enthalten. Also ist jedes solche h eine $\mathcal{K}(V)$–Linearkombination von Elementen aus H_2, also $Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_2) \subseteq Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_1''') = Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_1'') = \mathcal{E}$.

Da nach Konstruktion von H_2 auch die Umkehrung $\mathcal{E} \subseteq Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_2)$ gilt, ist der Satz unter obiger Annahme über H_1''' bewiesen.

Sei diese Annahme nun falsch, also existiere ein $h \in H_1'''$ mit $z^k_I \in \mathrm{supp}(h)$ und $|I| > MN$. Dann muss es aber auch ein parametrisches Monom $z^k_{I'}$ geben mit $I' = (i'_1, \ldots, i'_r)$, $i'_1 + \cdots + i'_r = MN$, da sonst z^k_I prinzipal wäre, im Widerspruch zur Autoreduziertheit von H_1'''.

Damit wären aber auch die Monome $z^k_{I_{i_\gamma}}$ mit $I_{i_\gamma} = (i'_1, \ldots, i_\gamma, \ldots, i'_r)$, $0 \leq i_\gamma < i'_\gamma$ parametrisch, von denen es i'_γ gibt. Für $\gamma = 1, \ldots, r$ hätte man dann $i'_1 + \cdots + i'_r = MN$ parametrische Monome, zu denen noch z^k_I selbst hinzuträte.

Dann wäre aber $\dim_{\mathbb{C}} Soln_{\mathcal{K}(V)}(H_1''') > MN$ im Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} \leq MN$. ■

1.7 Transformationsgruppen

1.7.1 Allgemeines

Definition 1.7.1 *Ein Vektorfeld X auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ einer komplexanalytischen Mannigfaltigkeit M ist ein analytischer Schnitt der kanonischen Abbildung $\pi_U : TU \to U$.*

Nachdem wir Differentialgleichungen und ihre Lösungen immer lokal definiert hatten, werden wir uns im allgemeinen auf Vektorfelder beschränken, die auf einer (koordinatisierbaren) offenen Umgebung U eines Punktes $p \in M$ definiert sind.

Sind $x^1, \ldots, x^n$ Koordinaten in U so lässt sich ein Vektorfeld X als $X = a^1\partial_{x_1} + \cdots + a^n\partial_{x_n}$ mit in U analytischen Funktionen a^i schreiben. Den $\mathcal{O}(U)$-Modul der Vektorfelder auf U nennen wir $\mathsf{V}(U)$. Jedes Vektorfeld $X \in \mathsf{V}(U)$ definiert eine Abbildung $X : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ mit $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

Definition 1.7.2 *Die* Lieklammer *zweier Vektorfelder X und Y auf U ist definiert durch $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Sie ist ein Vektorfeld auf U. Die Lieklammer ist eine alternierende, $\mathbb{C}$-bilineare Abbildung des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathsf{V}(U)$ in sich, und macht $\mathsf{V}(U)$ zu einer Lie–Algebra, erfüllt also die Jacobi–Identität $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.*

Sind in Koordinaten $X = a^i\partial_{x^i}$, $Y = b^i\partial_{x^i}$, so ist $[X,Y] = (a^i\partial_{x^i}b^j - b^i\partial_{x^i}a^j)\partial_{x^j}$.

Definition 1.7.3 *Als* Transformationsgruppe *auf $U \subseteq M$ bezeichnen wir eine $\mathbb{C}$-Unterliealgebra $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}(U)$.*

Definition 1.7.4 *Es sei $N \subseteq M$ eine analytische Untermannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X auf U heisse* tangential zu N *im Punkt $p \in N \cap U$ wenn $X(p) \in T_pN \subseteq T_pM$. Ein Vektorfeld X, das für alle $p \in U \cap N$ tangential zu N ist, heisse* in U tangential zu N.

Ist U eine Koordinatenumgebung, so können immer Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ gewählt werden, in denen N durch $x^n = \cdots = x^{n-k+1} = 0$ gegeben ist.

In diesen Koordinaten ist ein $X = a^i \partial_{x^i}$ genau dann zu N in U tangential wenn $a^n(p) = \cdots = a^{n-k+1}(p) = 0$ für alle $p \in N$ ist. Solche X erfüllen dann, wie man leicht einsieht, die Bedingung $X(f)(p) = 0$ alle $f \in \mathcal{O}(U)$, die auf N verschwinden und für alle $p \in N$. Umgekehrt sind X, die diese Bedingung erfüllen auch zu N in U tangential (man nehme $x^n, \ldots, x^{n-k+1}$ als f).

Lemma 1.7.1 *Es sei $N \subseteq M$ eine analytische Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen. Dann bilden die Vektorfelder $X \in \mathsf{V}(U)$, die in U tangential zu N sind, eine Transformationsgruppe.*

Beweis. Man benutze die Koordinatendarstellung $x^n = \cdots = x^{n-k+1} = 0$ der Untermannigfaltigkeit N. ■

Wir wollen jetzt den *Typ einer Transformationsgruppe* definieren.

Bemerkung 1.7.1 *Es sei $\phi : U \to V$ eine biholomorphe Abbildung offener Teilmengen komplexanalytischer Mannigfaltigkeiten. Dann induziert $T(\phi) : TU \xrightarrow{\sim} TV$ einen $\mathbb{C}$–Liealgebraisomorphismus $\phi^* : \mathsf{V}(V) \xrightarrow{\sim} \mathsf{V}(U)$.*

Definition 1.7.5 *Zwei Transformationsgruppen $\mathsf{V}_1 \subseteq \mathsf{V}(U_1)$ und $\mathsf{V}_2 \subseteq \mathsf{V}(U_2)$ seien* unmittelbar vom selben Typ*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $\phi : U_1 \to U_2$ gibt, mit $\phi^* : \mathsf{V}_2 \xrightarrow{\sim} \mathsf{V}_1$, oder $U_1 \subseteq U_2$ ist und $\mathsf{V}_2|_{U_1} = \mathsf{V}_1$.*

Definition 1.7.6 *Zwei Transformationsgruppen $\mathsf{V}_1 \subseteq \mathsf{V}(U_1)$ und $\mathsf{V}_2 \subseteq \mathsf{V}(U_2)$ seien* vom selben Typ*, wenn sie im symmetrischen und transitiven Abschluß der in Definition 1.7.5 definierten Relation liegen.*

1.7.2 Formale Transformationsgruppen

Für die spätere Verewendung definieren wir hier noch eine kleine Erweiterung des Begriffs der Transformationsgruppe:

Definition 1.7.7 *Es sei R ein integrer Differentialring mit den Derivationen $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}$. Dann ist ein* formales Vektorfeld *über R ein Ausdruck $X = a^1\partial_{x^1} + \cdots + a^n\partial_{x^n}$ mit $a^i \in R$.*

Zwei formale Vektorfelder $X = a^1\partial_{x^1} + \cdots + a^n\partial_{x^n}$ und $Y = b^1\partial_{x^1} + \cdots + b^n\partial_{x^n}$ können durch das Klammerprodukt

$$\left[a^i\partial_{x^i}, b^j\partial_{x^j}\right] = \left(\sum_i \left(a^i\partial_{x^i}b^j - b^i\partial_{x^i}a^j\right)\right)\partial_{x^j} \tag{1.184}$$

verknüpft werden. Es erfüllt die Jacobiidentität $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0$ für formale Vektorfelder X, Y, Z.

Durch komponentenweise Addition $X+Y = (a^i+b^i)\partial_{x^i}$ und skalare Multiplikation $rX = (ra^i)\partial_{x^i}$ mit $r \in R$ wird V_R, die Menge der formalen Vektorfelder über R zu einem R–Modul, der gleichzeitig eine R_0–Liealgebra über dem Konstantenring R_0 von R ist. (Wir haben hier den Begriff der Liealgebra leicht verallgemeinert, indem wir von Vektorräumen über Körpern zu Moduln über Ringen übergegangen sind).

Hat man wie in Abschnitt 1.3.2 (1.8) ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ {\scriptstyle \frac{\partial}{\partial x^i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \alpha^j{}_i \frac{\partial}{\partial y^j}} \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array} \tag{1.185}$$

so wird eine Abbildung $\phi_* : \mathsf{V}_R \to \mathsf{V}_S$ induziert, die durch

$$\phi_* \left(\sum a^i \partial_{x^i} \right) = \sum \phi(a^i) \phi_*(\partial_{x^i}) \tag{1.186}$$

gegeben ist. Diese Abbildung kommutiert mit der Lieklammer:

$$\begin{aligned} & \phi_* \left([a^i \, \partial_{x^i}, b^j \, \partial_{x^j}] \right) && (1.187) \\ = \; & \phi_* \left((a^i \, \partial_{x^i} b^j - b^i \, \partial_{x^i} a^j) \partial_{x^j} \right) && (1.188) \\ = \; & \left(\phi(a^i) \alpha^q_i \, \partial_{y^q} \, \phi(b^j) \alpha^p_j - \phi(b^i) \alpha^q_i \, \partial_{y^q} \, \phi(a^j) \alpha^p_j \right) \partial_{y^p} && (1.189) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\phi_*(a^i \, \partial_{x^i}), \phi_*(b^j \, \partial_{x^j}) \right] && (1.190) \\ = \; & \left[\phi(a^i) \alpha^r_i \, \partial_{y^r}, \phi(b^j) \alpha^s_j \, \partial_{y^s} \right] && (1.191) \\ = \; & \left(\phi(a^i) \alpha^r_i \, \partial_{y^r} \left(\phi(b^j) \alpha^s_j \right) - \phi(b^i) \alpha^r_i \, \partial_{y^r} \left(\phi(a^j) \alpha^s_j \right) \right) \partial_{y^s} && (1.192) \\ = \; & \phi_* \left([a^i \, \partial_{x^i}, b^j \, \partial_{x^j}] \right) && (1.193) \\ + \; & \left(\phi(a^i) \alpha^r_i \, \phi(b^j) \, \partial_{y^r} \alpha^s_j - \phi(b^i) \alpha^r_i \, \phi(a^j) \, \partial_{y^r} \alpha^s_j \right) \partial_{y^s} && (1.194) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \left(\phi(a^i) \alpha^r_i \, \phi(b^j) \, \partial_{y^r} \alpha^s_j - \phi(b^i) \alpha^r_i \, \phi(a^j) \, \partial_{y^r} \alpha^s_j \right) \partial_{y^s} \\ = \; & \left(\phi(a^i) \alpha^r_i \, \phi(b^j) \, \partial_{y^r} \alpha^s_j - \phi(b^j) \alpha^r_j \, \phi(a^i) \, \partial_{y^r} \alpha^s_i \right) \partial_{y^s} && (1.195) \\ = \; & \left(\phi(a^i) \phi(b^j) \left(\alpha^r_i \, \partial_{y^r} \alpha^s_j - \alpha^r_j \, \partial_{y^r} \alpha^s_i \right) \right) \partial_{y^s} \end{aligned}$$

Aus $\phi_*(\partial_{x^i} \partial_{x^j}) = \phi_*(\partial_{x^j} \partial_{x^i})$ folgt aber als Bedingung an die a^i_j, daß $\alpha^r_i \, \partial_{y^r} \alpha^r_j = \alpha^r_j \partial_{y^r} \alpha^r_i$, so daß (1.195) verschwindet.

1.7.3 Implizite Darstellung

Definition 1.7.8 *Es sei $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offenes Gebiet, eine Transformationsgruppe.*

Weiter sei ein System von lpdgl $E \subseteq \mathcal{L}(R, u^1, \ldots, u^n)$, $R \subseteq \mathcal{O}(U)$ integrer Differentialring, mit $Soln_{\mathcal{O}(U)}(E) \xrightarrow{\sim} \mathsf{V}$ unter $(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^n) \to (\bar{u}^1 \partial_{x^1} + \cdots + \bar{u}^n \partial_{x^n})$ gegeben.

Dann heißt E implizite Darstellung *von V.*

Satz 1.7.1 *Es sei $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offenes Gebiet, eine r–dimensionale Transformationsgruppe, die von $X_i = \sum u^j_i \, \partial_{x^j}$, $i = 1, \ldots, r$, erzeugt wird, wobei $u^j_i \in R$, $R \subseteq \mathcal{O}(U)$ integrer Differentialring.*

Dann ist eine implizite Darstellung $E \subseteq \mathcal{L}(K, u^1, \ldots, u^n)$ von V konstruktiv bestimmbar ($K = Q(R)$).

Beweis. Satz 1.6.4 mit $m = n$ und $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathsf{V}$ unter $(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^n) \to (\bar{u}^1 \partial_{x^1} + \cdots + \bar{u}^n \partial_{x^n})$ ■

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie bei der Bildung einer neuen Transformationsgruppe aus einer oder mehreren implizit gegebenen Transformationsgruppen die implizite Darstellung der neuen Transformationsgruppe konstruktiv aus den impliziten Darstellungen der Ausgangsgruppen gebildet werden kann.

Satz 1.7.2 *Es seien* $\mathsf{U}, \mathsf{V} \subseteq \mathsf{V}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *offenes Gebiet, zwei endlichdimensionale Transformationsgruppen mit den impliziten Darstellungen* $E \subseteq \mathcal{L}(K, u^1, \ldots, u^n)$, $F \subseteq \mathcal{L}(K, v^1, \ldots, v^n)$ *gegeben, wo* $K \subseteq Q(\mathcal{O}(U))$ *sei.*

Weiter sei

(i) $\mathsf{W} = \mathsf{U} \cap \mathsf{V}$

(ii) $\mathsf{W} = \mathsf{U} + \mathsf{V}$

(iii) W *der von* $[u, v]$, $u \in \mathsf{U}$, $v \in \mathsf{V}$ *erzeugte* $\mathbb{C}$*–Vektorraum.*

Dann kann man eine implizite Darstellung $G \subseteq \mathcal{L}(K, w^1, \ldots, w^n)$ *von* W *konstruktiv bestimmen.*

Beweis. Im Fall (i) setze man $G = E \cup F$.

Im Fall (ii) nehme man die Gleichungen $w^i = u^i + v^i$ sowie E und F zusammen und nenne das so erhaltene System G'. $G'' = \mathcal{J}(G')$ sei eine Janetbasis von G' bezüglich einer Eliminationstermordnung mit $w^i_J < u^j_K, v^k_L$. G besteht dann aus den lpdgl von G'' die nur w^i_J als Monome enthalten. Der Beweis dieser Behauptung ist dem von Satz 1.6.4 und Satz 1.6.6 so ähnlich, daß wir auf seine Durchführung im einzelnen verzichten.

Im Fall (iii) ist die Abbildung $(u, v) \to [u, v] = w$ in Koordinaten geschrieben:

$$w^i = \sum_j \left(u^j \partial_{x^j} v^i - v^j \partial_{x^j} u^i \right) \tag{1.196}$$

Es handelt sich also um eine $\mathbb{C}$–bilineare Abbildung, wie in den dem Satz 1.6.6 vorausgehenden Bemerkungen diskutiert. Also kann man nach dem im Beweis dieses Satzes angegebenen Verfahren G konstruieren. ■

1.7.4 Transformationsgruppen der Ebene

1.8 Symmetrien von Differentialgleichungen

1.8.1 Prolongationen

1.8.2 Differentialinvarianten

1.8.3 Bestimmende Systeme

$g_{5,1}$	$p, q, xq, xp - yq, yp$
$g_{6,2}$	p, q, xq, yq, xp, yp
$g_{8,3}$	$p, q, xq, yq, xp, yp, x^2p + xyq, xyp + y^2q$
$g_{2,4}$	q, yq
$g_{3,5}$	p, q, yq
$g_{4,6}$	p, q, yq, xp
$g_{3,7}$	$p, q, xp + cyq, c \neq 0, 1$
$g_{3,8}$	q, yq, y^2q
$g_{4,9}$	p, q, yq, y^2q
$g_{3,10}$	$p + q, xp + yq, x^2p + y^2q$
$g_{5,11}$	p, q, yq, xp, y^2q
$g_{6,12}$	p, q, yq, xp, y^2q, x^2p
$g_{3,13}$	$p, xp + yq, x^2p + 2xyq$
$g_{4,14}$	$yq, p, xp, x^2p + xyq$
$g_{r+1,15}$	$q, \phi_1(x)q, \phi_2(x)q, \ldots, \phi_r(x)q, r \geq 1, \phi_1(x) = x$
$g_{r+2,16}$	$q, \phi_1(x)q, \phi_2(x)q, \ldots, \phi_r(x)q, yq, r \geq 1, \phi_1(x) = x$
$g_{r,17}$	$e^{a_\nu x}q, xe^{a_\nu x}q, \ldots, x^{k_\nu}e^{a_\nu x}q, p$ $1 \leq \nu \leq l$, $l \geq 1$, $a_\nu \neq a_\mu$ für $\nu \neq \mu$, $a_1 = 1$, $a_\nu \neq 0$ für alle ν oder $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, sowie $k_\nu \leq k_{\nu+1}$. $r = \sum(k_\nu + 1) + 1$.
$g_{r,18}$	$e^{a_\nu x}q, xe^{a_\nu x}q, \ldots, x^{k_\nu}e^{a_\nu x}q, p, yq$ $1 \leq \nu \leq l$, $l \geq 1$, $a_\nu \neq a_\mu$ für $\nu \neq \mu$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ sowie $k_\nu \leq k_{\nu+1}$. $r = \sum(k_\nu + 1) + 2$.
$g_{r+2,19}$	$q, xq, \ldots, x^{r-1}q, p, xp + cyq, r > 1$
$g_{r+2,20}$	$q, xq, \ldots, x^{r-1}q, p, xp + (ry + x^r)q, r \geq 1$
$g_{r+3,21}$	$q, xq, \ldots, x^{r-1}q, yq, p, xp, r > 1$
$g_{r+3,22}$	$q, xq, \ldots, x^{r-1}q, p, 2xp + (r-1)yq, x^2p + (r-1)xyq, r > 1$
$g_{r+4,23}$	$q, xq, \ldots, x^{r-1}q, yq, p, xp, x^2p + (r-1)xyq, r > 1$
$g_{3,24}$	$p, q, xp + yq$
$g_{2,25}$	$q, xp + yq$
$g_{2,26}$	p, q
$g_{1,27}$	p

Tabelle 1.1: Transformationsgruppen der Ebene.

Kapitel 2

Bestimmung des Typs der Symmetriegruppe

2.1 Problemstellung

2.2 Mögliche Typen von Transformationsgruppen

2.3 Bestimmung des Typs mittels Eigenschaften der Janet–Basis

2.4 Unterscheidung nach Dimension

2.5 Unterscheidung nach Typ der Janet–Basis

2.6 Unterscheidung mittels der Lie'schen Invarianten λ und ν

2.7 Unterscheidung durch das charakteristische Polynom der Liealgebra

2.8 Zusammenfassung

Kapitel 3

Auffindung der kanonischen Koordinaten

3.1 Das nichtlineare DGL–System für σ und ρ

3.2 Symmetrien des DGL–Systems für σ und ρ

3.3 Berechnung einer Normalform der DGL–Systeme für σ und ρ

3.4 Integration der Gleichungen für σ und ρ über einfache Systeme von Hilfsgleichungen

3.5 Zusammenstellung der Ergebnisse

Kapitel 4

Lösung der Gleichung

4.1 Transformation der Gleichung in kanonische Koordinaten

4.2 Lösungsmethoden für Gleichungen in kanonischen Koordinaten

4.2.1 4 oder mehr Symmetrien

4.2.2 Die Symmetriegruppe ist auflösbar

4.2.3 Nicht auflösbare Symmetriegruppe

4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Literaturverzeichnis

[1] Lie, Sophus, Gesammelte Abhandlungen, 5. Band, 1. Abteilung, Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen, B. G. Teubner, Leipzig, H. Aschehoug & Co., Kristiania, 1924

[2] Bucur, I., Deleanu, A., Introduction to the Theory of Categories and Functors, John Wiley & Sons Ltd, 1968

[3] Boulier, F. Etude et implantation de quelques algorithmes en algèbre différentielle, these présentée à l'Université des sciences et technologies de Lille

[4] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., Ideals, Varieties and Algorithms, UTM, Springer, New York, 1992

[5] Buchberger, B., Introduction to Groebner Bases, unpublished

[6] Schwarz, F. Symmetries of 2^{nd} and 3^{rd} Order ODE's, ISSAC '95

[7] Schwarz, F., An Algorithm for Determining the Size of Symmetry Groups, Computing **49**, 95–115(1992)

[8] Gunning, R. C., Rossi, R., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Inc., 1965