Jürgen Böhm

Etale Kohomologie

16. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1

Etale Morphismen

1.1 Allgemeines

Definition 1.1.1. *Es sei A ein noetherscher kommutativer Ring und $C = A[x]$, sowie $g(x) \in C$ ein monisches Polynom. Weiter sei*

$$B = A[x]/(g(x))$$

und $B' = B_b$ mit $b \in B$, so daß das Bild von $g'(x)$ unter der kanonischen Abbildung $C \to B'$ eine Einheit in B' ist.

Dann heiße der Ring B' mit $A \to (A[x]/(g(x)))_b = B'$ standard–etale *über A.*

Proposition 1.1.1. *Es sei $A \to B$ eine standard–etale Ringerweiterung. Dann ist $f : \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ ein etaler Morphismus.*

Proposition 1.1.2. *Es sei $f : X \to Y$ eine etale Abbildung mit $f(x) = y$ für $x \in X$ und $y \in Y$.*

Dann gibt es offene affine Umgebungen $V = \mathrm{Spec}\,(A) \ni y$ und $U = \mathrm{Spec}\,(B) \ni x$ mit

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

so daß die Abbildung $A \to B$, die durch $U \to V$ induziert wird, standard–etale ist.

Beweis.

2

Grothendieck–Topologien

2.1 Allgemeines

Definition 2.1.1. *Eine* Grothendieck–Topologie T *besteht aus einer Kategorie* $\mathbf{C} = \operatorname{Cat} T$ *(mit Faserprodukten) und einem System von Familien von Abbildungen, genannt* Überdeckungen $\operatorname{Cov} T$.

Dabei ist ein Element von $\operatorname{Cov} T$, *genannt eine* Überdeckung von V, *eine Familie* $(f_i : U_i \to V)_{i \in I}$ *von Morphismen* $f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(U_i, V)$.

Diese sollen folgende Bedingungen erfüllen

1. *Jeder Isomorphismus* $f : U \to V$ *ist eine Überdeckung* $(f : U \to V) \in \operatorname{Cov} T$.
2. *Sind* $(g_{ij} : U_{ij} \to V_i)_{ij}$ *und* $(f_i : V_i \to W)_i$ *alles Überdeckungen, so ist auch die Komposition* $(f_i \circ g_{ij} : U_{ij} \to W)_{ij}$ *eine Überdeckung.*
3. *Ist* $(f_i : U_i \to V)_i$ *eine Überdeckung und* $g : W \to V$ *ein Morphismus in* $\mathbf{C}$, *so sind auch die Basiserweiterungen mit* g, *also* $(f_i' : U_i \times_V W \to W)_i$ *eine Überdeckung von* W.

Definition 2.1.2. *Eine Familie von Morphismen* $(f_i : U_i \to V)_i$ *ist ein* effektiver Epimorphismus, *wenn für jeden Funktor* $F_Z(-) = \operatorname{Hom}(-, Z)$ *die Sequenz*

$$F_Z(V) \longrightarrow \prod_{i \in I} F_Z(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F_Z(U_i \times_V U_j) \tag{2.1}$$

exakt ist, also die linke Abbildung eine Bijektion in den Equalizer der beiden rechten Abbildungen ist. Anders gesagt: Es seien $s_i \in F_Z(U_i)$ *gegeben, für die* $p_1^*(s_i) = p_2^*(s_j)$ *für alle* i, j *ist.*

Dabei seien

$$p_1 : U_i \times_V U_j \to U_i$$

und

$$p_2 : U_i \times_V U_j \to U_j$$

die kanonischen Projektionen. Dann gibt es genau ein $s \in F_Z(V)$ *mit* $f_i^*(s) = s_i$.

Definition 2.1.3. *Es sei $(f_i : U_i \to V)_i$ ein effektiver Epimorphismus. Ist dann für jedes $W \to V$ auch $(f_i' : U_i \times_V W \to W)_i$ ein effektiver Epimorphismus, so heißt $(f_i)_i$ ein* universeller effektiver Epimorphismus*, abgekürzt* ueE*.*

Proposition 2.1.1. *Es seien $(f_i : U_i \to V)_i$ und $(f_j' : U_j' \to V)_j$ zwei universelle effektive Epimorphismen. Dann ist auch die Vereinigung*

$$(f_i : U_i \to V) \cup (f_j' : U_j' \to V)$$

ein universeller effektiver Epimorphismus.

Proposition 2.1.2. *Es seien $(g_{ij} : U_{ij} \to V_i)_{ij}$ und $(f_i : V_i \to W)$ universelle effektive Epimorphismen. Dann ist auch die Komposition*

$$(h_{ij} = f_i \circ g_{ij} : U_{ij} \to W)_{ij}$$

ein universeller effektiver Epimorphismus.

Beweis. Es sei $F = F_Z$ und ein System $(s_{ij} \in F(U_{ij}))$ von bezüglich h_{ij} kompatiblen Schnitten gegeben. Es ist also

$$(h_{kl}')^*(s_{ij}) = (h_{ij}')^*(s_{kl})$$

mit h_{ij}', h_{kl}' aus folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & U_{ij} \times_W U_{kl} \arrow[dl, "h_{kl}'"'] \arrow[dr, "h_{ij}'"] & \\
U_{ij} \arrow[dr, "h_{ij}"'] & & U_{kl} \arrow[dl, "h_{kl}"] \\
 & W &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Aus dem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & U_{ij} \times_W U_{ij'} \arrow[dl, "h_{ij'}''"'] \arrow[dr, "h_{ij}''"] & \\
U_{ij} \arrow[d, "="] \arrow[dr] & U_{ij} \times_{V_i} U_{ij'} \arrow[u, "t_{ijj'}"'] \arrow[dl, "g_{ij'}'"'] \arrow[dr, "g_{ij}'"] & U_{ij'} \arrow[d, "="] \arrow[dl] \\
U_{ij} \arrow[dr, "g_{ij}"'] & W & U_{ij'} \arrow[dl, "g_{ij'}"] \\
 & V_i \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

liest man ab

$$(g_{ij'}')^*(s_{ij}) = t_{ijj'}^*(h_{ij'}'')^*(s_{ij}) = t_{ijj'}^*(h_{ij}'')^*(s_{ij'}) = (g_{ij}')^*(s_{ij'}) \tag{2.4}$$

Die s_{ij} sind also kompatibel bezüglich des effektiven Epimorphimsus

$$(g_{ij} : U_{ij} \to V_i)_j$$

und es existiert damit ein $s_i \in F(V_i)$ mit

$$g_{ij}^*(s_i) = s_{ij}.$$

Wir zeigen nun, daß die s_i zu einem $s \in F(W)$ verkleben, für das

$$f_i^*(s) = s_i$$

gilt.

Betrachte dazu das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & U_{ij} \times_W U_{kl} \arrow[dl, "g''_{ij,kl}"'] \arrow[dr, "g''_{kl,ij}"] & & \\
 & U_{ij} \times_W V_k \arrow[dl, "f''_{ij,k}"'] \arrow[dr, "g'_{k,ij}"] & & V_i \times_W U_{kl} \arrow[dl, "g'_{i,kl}"'] \arrow[dr, "f''_{kl,i}"] & \\
U_{ij} \arrow[dr, "g_{ij}"'] & & V_i \times_W V_k \arrow[dl, "f'_{i,k}"] \arrow[dr, "f'_{k,i}"'] & & U_{kl} \arrow[dl, "g_{kl}"] \\
 & V_i \arrow[dr, "f_i"'] & & V_k \arrow[dl, "f_k"] & \\
 & & W & &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Es sei

$$\begin{aligned} s'_i &= f'^*_{i,k}(s_i) \\ s'_k &= f'^*_{k,i}(s_k) \end{aligned}$$

Weiter ist nach obigem

$$\begin{aligned} s_{ij} &= g^*_{ij}(s_i) \\ s_{kl} &= g^*_{kl}(s_k) \end{aligned}$$

Man setze

$$\begin{aligned} s'_{ijk} &= (g'_{k,ij})^*(s'_i) \\ s'_{kij} &= (g'_{k.ij})^*(s'_k) \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (g''_{ij,kl})^*(s'_{ijk}) &= (g''_{ij,kl})^*(g'_{k,ij})^* f'^*_{i,k}(s_i) = (g''_{ij,kl})^*(f''_{ij,k})^* g^*_{ij}(s_i) = (g''_{ij,kl})^*(f''_{ij,k})^*(s_{ij}) = \\ &= (g''_{kl,ij})^*(f''_{kl,i})^*(s_{kl}) = (g''_{kl,ij})^*(f''_{kl,i})^* g^*_{kl}(s_k) = (g''_{ij,kl})^*(g'_{k,ij})^*(f'_{k,i})^*(s_k) = \\ &\qquad = (g''_{ij,kl})^*(g'_{k,ij})^*(s'_k) = (g''_{ij,kl})^*(s'_{kij}) \end{aligned}$$

Da die $(g''_{ij,kl})$ ein System von ueE sind, ist deshalb auch

$$(g'_{k,ij})^*(s'_i) = s'_{ijk} = s'_{kij} = (g'_{k,ij})^*(s'_k)$$

Nun sind aber auch die $(g'_{k,ij})$ ein System von ueE und es ist deshalb

$$f'^*_{i,k}(s_i) = s'_i = s'_k = f'^*_{k,i}(s_k)$$

Damit verkleben die s_i entlang des ueE $(f_i : V_i \to W)_i$ zu dem gesuchten $s \in F(W)$.

3

Limites

Es seien I und $\mathbf{C}$ Kategorien und $F : I \to \mathbf{C}$ ein (kovarianter) Funktor. Jedes Objekt X aus $\mathbf{C}$ definiert einen Funktor

$$c_X : I \to \mathbf{C}, \quad c_X(i) = X, \quad c_X(i \to j) = \mathrm{id}_X \tag{3.1}$$

Die Zuordnung

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(F, c_X) \tag{3.2}$$

definiert einen kovarianten Funktor

$$\varinjlim F : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets} \tag{3.3}$$

Dieser Funktor ist darstellbar, wenn ein Objekt $\varinjlim F$ aus $\mathbf{C}$ existiert, für das man einen Isomorphismus von Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(F, c_X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varinjlim F, X) \tag{3.4}$$

aufgefaßt als Funktoren $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(F, c_X)$ und $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varinjlim F, X)$, hat

Definition 3.0.1. *Man nennt $\varinjlim F$, wenn es existiert, den* direkten Limes *von (F, I).*

Aus der Definitionsgleichung (3.4) entnimmt man für $X = \varinjlim F$ die Existenz von Morphismen $F_i \to \varinjlim F$, so daß für $\phi : i \to j$ aus $\mathrm{Hom}_I(i, j)$ die Beziehung

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim F & \\ F(i) \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[rr, "F(\phi)"] & & F(j) \arrow[ul, "\iota_j"'] \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

gilt.

Dual entsteht für den kontravarianten Funktor in X

$$\varprojlim F : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(c_X, F) \tag{3.6}$$

ein darstellendes Objekt $\varprojlim F$ in $\mathbf{C}$ mit dem Isomorphismus von Funktoren in X

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(c_X, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \varprojlim F) \tag{3.7}$$

Definition 3.0.2. *Man nennt* $\varprojlim F$*, wenn es existiert, den* inversen Limes *von* (F, I)*.*

Wieder entnimmt man aus der Definitionsgleichung (3.7) für $X = \varprojlim F$ die Existenz von Morphismen $\varinjlim F \to F_i$, so daß für $\phi : i \to j$ aus $\mathrm{Hom}_I(i, j)$ die Beziehung

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim F \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\phi)"] & & F(j) \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

gilt.

Anmerkung 3.0.1. Die Limites sind als darstellende Objekte eindeutig, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, bestimmt.

Proposition 3.0.1. *Für* $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ *existiert* $\varinjlim F$*.*

Beweis. Es ist

$$\varinjlim F = \coprod_{i \in I} F_i / \sim \tag{3.9}$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation in $\coprod_{i \in I} F_i$ ist, die von den Elementen

$$\{(\iota_i'(x), \iota_j'(y)) \mid x \in F_i, y \in F_j, y = F(\phi)(x), \phi : i \to j \text{ in } \mathrm{Hom}_I(i, j)\} \tag{3.10}$$

mit $\iota_i' : F_i \to \coprod_{i \in I} F_i$ erzeugt wird.

Proposition 3.0.2. *Für* $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$ *existiert* $\varinjlim F$*.*

Beweis. Es ist

$$\varinjlim F = \bigoplus_{i \in I} F_i / R \tag{3.11}$$

wobei R der Relationenmodul in $\bigoplus_{i \in I} F_i$ ist, der von den Elementen

$$\{\iota_j'(y) - \iota_i'(x) \mid x \in F_i, y \in F_j, y = F(\phi)(x), \phi : i \to j \text{ in } \mathrm{Hom}_I(i, j)\} \tag{3.12}$$

mit $\iota_i' : F_i \to \bigoplus_{i \in I} F_i$ erzeugt wird.

Im Fall $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ bedeutet die oben eingeführte Relation $x \sim y$ für $x \in F_i$ und $y \in F_j$, daß ein Diagramm in I existiert

$$\begin{tikzcd} & j_1 & & j_2 & \cdots & j_{r-1} & & j_r & \\ i_0 \arrow[ur] & & i_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & & \cdots & & i_{r-1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & i_r \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

mit $F_{i_0} = F_i$ und $F_{i_r} = F_j$ sowie Elemente $x_{i_\nu} \in F_{i_\nu}$ und $y_{j_\nu} \in F_{j_\nu}$ mit $x_{i_0} = x$ und $x_{i_r} = y$, so daß F, angewandt auf dieses Diagramm eine entsprechende Kette von Abbildungen der x_{i_ν}, y_{j_ν} induziert:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & y_{j_1} & & y_{j_2} & \cdots & y_{j_{r-1}} & & y_{j_r} & \\
x = x_{i_0} \arrow[ur] & & x_{i_1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \cdots & & x_{i_{r-1}} \arrow[ul] \arrow[ur] & & x_{i_r} = y \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{3.14}
$$

Definition 3.0.3. *Besitzt die Kategorie I für ein Paar (i, j) von Objekten aus I eine Kette wie in (3.13) mit $i = i_0$ und $j = i_r$, so nennt man diese Kette eine* Verbindung von i und j der Länge r.

Besitzt in einer Kategorie I jedes Paar (i, j) eine Verbindung, so heiße I zusammenhängend.

Definition 3.0.4. *Für eine Indexkategorie I seien folgende Bedingungen definiert:*

(L1) Für Morphismen in I

$$
\begin{tikzcd}
 & j \\
i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & k
\end{tikzcd}
\tag{3.15}
$$

existieren $(j \to l) \in \mathrm{Hom}_I(j, l)$ und $(k \to l) \in \mathrm{Hom}_I(k, l)$, so daß

$$
\begin{tikzcd}
 & j \arrow[dr] & \\
i \arrow[ur] \arrow[dr] & & l \\
 & k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{3.16}
$$

kommutiert.

(L2) Für Morphismen in I

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, shift left, "\phi_1"] \arrow[r, shift right, "\phi_2"'] & j
\end{tikzcd}
\tag{3.17}
$$

existiert ein $\psi : j \to k$ mit

$$\psi \circ \phi_1 = \psi \circ \phi_2 \tag{3.18}$$

(L3) I ist zusammenhängend

Erfüllt eine Indexkategorie I die Bedingungen (L1) und (L2) heiße sie pseudofiltriert*, ist sie pseudofiltriert und zusammenhängend, so heiße sie* filtriert*. Ist die duale Kategorie I^0 filtriert, so heiße I* kofiltriert.

Proposition 3.0.3. *Es sei* $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ *und* F, I *wie oben. Die Kategorie* I *erfülle die Bedingungen (L1) und (L2).*

Dann gilt $x \sim y$ *mit* $x \in F_i$, $y \in F_j$ *genau dann, wenn ein* $k \in I$ *existiert mit* $i \to k \leftarrow j$ *und*

$$F(i \to k)(x) = F(j \to k)(y)$$

Beweis. Nach obigem ist $x \sim y$ äquivalent zur Existenz einer Kette von Morphismen

$$i = i_0 \to j_0 \leftarrow i_1 \to j_1 \leftarrow i_2 \to \cdots \leftarrow i_r = j$$

und Elementen $x_{i_\nu} \in F_{i_\nu}$, $y_{j_\nu} \in F_{j_\nu}$ mit $x = x_{i_0}$ und $y = x_{i_r}$, so daß $F(-)$, angewandt auf diese Kette eine Reihe von Abbildungen der Elemente

$$x = x_{i_0} \to y_{j_0} \leftarrow x_{i_1} \to y_{j_1} \leftarrow x_{i_2} \to \cdots \leftarrow x_{i_r} = j \tag{3.19}$$

stiftet.

Für $r = 1$ ist der Satz damit schon gezeigt, es ist $k = j_0$.

Für beliebiges r folgt aus (3.19), daß $x_{i_1} \sim x_{i_r}$ mit einer Verbindung der Länge $r - 1$. Induktiv kann man also die Existenz eines $k' \in I$ und Morphismen $(i_1 \to k')$ sowie $(i_r \to k')$ mit

$$F(i_1 \to k')(x_{i_1}) = F(i_r \to k')(x_{i_r}) \tag{3.20}$$

annehmen.

Man betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & k & & \\
 & j_0 \arrow[ur] & & k' \arrow[ul] & \\
i_0 \arrow[ur] & & i_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & & i_r \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

wobei die oberste Raute wegen (L1) (bzw. wenn $j_0 = k'$ wegen (L2)) existiert. Aus ihm liest man ab

$$\begin{aligned} F(i_0 \to k)(x_{i_0}) &= F(j_0 \to k)F(i_0 \to j_0)(x_{i_0}) = F(j_0 \to k)F(i_1 \to j_0)(x_{i_1}) = \\ &= F(k' \to k)F(i_1 \to k')(x_{i_1}) = F(k' \to k)F(i_r \to k')(x_{i_r}) = F(i_r \to k)(x_{i_r}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

womit der Schluß von $r - 1$ auf r vollzogen ist.

Definition 3.0.5. *Es sei* $\mathbf{F}$ *die Funktorkategorie* $\mathrm{Hom}(I, \mathbf{Ab})$

Proposition 3.0.4. *Die Kategorie* $\mathbf{F}$ *ist eine abelsche Kategorie und die Abbildung*

$$F \in \mathbf{F} \mapsto \varinjlim_I F \tag{3.23}$$

ist ein rechtsexakter Funktor von $\mathbf{F}$ *nach* $\mathbf{Ab}$.

Beweis. Wegen $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\varinjlim_I F, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}}(F, c_X)$ ist $F \mapsto \varinjlim_I F$ ein linksadjungierter, also rechtsexakter Funktor von $\mathbf{F}$ nach $\mathbf{Ab}$.

Proposition 3.0.5. *Es gibt für* $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$ *und* I*, sowie* F*, wie oben, eine kanonische Abbildung*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{setlim}_{\overrightarrow{I}} F \arrow[r] & \varinjlim_I F \\ F_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & F_i \arrow[u, "\iota_i"'] \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

Proposition 3.0.6. *Erfüllt die Indexkategorie* I *die Bedingungen (L1), (L2), (L3) so ist die Abbildung* $\underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F \to \varinjlim_I F$ *eine Bijektion.*

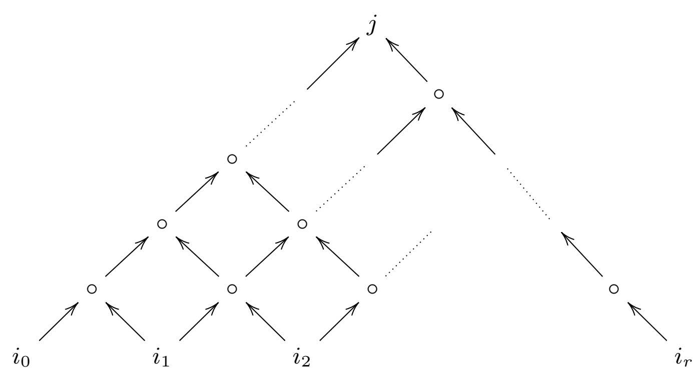
Beweis. Es ist $\varinjlim_I F = \bigoplus_{i \in I} F_i / R$ mit dem oben eingeführten Relationenmodul R, der von $F(i \to j)(x) - x$ für alle $(i \to j) \in \mathrm{Hom}_I(i,j)$ und alle $x \in F_i$ erzeugt wird.

Wir zeigen zunächst, daß für $x_{j_\nu} \in F_{j_\nu}$ die Beziehung

$$F(j_0 \to j)x_{j_0} + \cdots + F(j_s \to j)x_{j_s} = y \tag{3.25}$$

für geeignetes $y \in F_j$ sowie geeigneten Morphismen $(j_\nu \to j) \in \mathrm{Hom}_I(j_\nu, j)$ gilt.

Betrachte dazu das Diagramm



(3.26)

Da für $j_\nu, j_{\nu+1}$ aufgrund (L3) die Existenz einer verbindenden Kette angenommen werden kann, können alle diese Ketten zu einer Verbindung von j_0 bis j_s mit den Zwischenstationen $j_1, \ldots, j_{s-1}$ in dieser Reihenfolge zusammengesetzt werden. Man kann also im obigen Diagramm $j_\nu = i_{a(\nu)}$ mit $a(\nu) < a(\nu+1)$ und $j_0 = i_0$ sowie $j_s = i_r$ annehmen. Das Diagramm liefert dann die gesuchten Morphismen $(j_\nu \to j) \in \mathrm{Hom}_I(j_\nu, j)$.

Es folgt damit also nach Definition von R, daß

$$x_{j_0} \oplus \cdots \oplus x_{j_s} = y \mod R \tag{3.27}$$

und damit die Surjektivität von $\underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F \to \varinjlim_I F$.

Proposition 3.0.7. *Wenn die Indexkategorie* I *die Bedingungen (L1), (L2), (L3) erfüllt, dann ist die Abbildung*

$$\varinjlim_I : F \in \mathbf{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{fun}}(I, \mathbf{Ab}) \mapsto \varinjlim_I F \in \mathbf{Ab} \tag{3.28}$$

ein exakter Funktor abelscher Kategorien.

Beweis. Nur noch die Linksexaktheit ist nachzuweisen. Es sei also $0 \to F'(i) \to F(i)$ injektiv für zwei $F', F \in \mathbf{F}$ und alle $i \in I$. Dann ist jedenfalls $\underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F' \hookrightarrow \underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F$ offensichtlich injektiv. Nach voriger Proposition ist aber $\varinjlim_I F' = \underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F'$ und $\varinjlim_I F = \underrightarrow{\operatorname{setlim}}_I F$ und somit auch $0 \to \varinjlim_I F' \to \varinjlim_I F$.

4

Prägarben

Definition 4.0.1. *Es seien* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *Kategorien. Dann heißt ein kontravarianter Funktor*

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

auch Prägarbe *auf* $\mathbf{C}$.

Wir nehmen meistens an, daß $\mathbf{D} = \mathbf{Sets}$ *oder* $\mathbf{D} = \mathbf{Ab}$ *ist und sprechen von* mengenwertigen Prägarben *bzw.* abelschen Prägarben.

Die entsprechenden Kategorien seien $\mathbf{P}_{\mathbf{Sets}}(\mathbf{C})$ *bzw.* $\mathbf{P}(\mathbf{C})$. *Die Morphismen von Prägarben sind die Funktormorphismen.*

Die Abbildungen

$$F(V \to U) = \mathrm{res}_{V \to U} : F(U) \to F(V)$$

für $V \to U$ *in* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, U)$ *heißen* Restriktionsabbildungen.

Die Kategorie $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ ist eine abelsche Kategorie, eine exakte Sequenz von Prägarben

$$F' \to F \to F''$$

ist eine Sequenz, so daß für alle $U \in \mathbf{C}$ auch

$$F'(U) \to F(U) \to F''(U)$$

exakt ist.

Proposition 4.0.1. *Es gilt folgendes in* $\mathbf{P}(\mathbf{C})$

1. *Es existieren Summen und Produkte (AB3 und AB3*).*
2. *Summen und Produkte exakter Sequenzen sind exakt (AB4 und AB4*)*
3. *Gefilterte Limites exakter Sequenzen gefilterter Systeme sind exakt (AB5).*

Beweis. Man überprüft dies für ein System $(F_i)_{i \in I}$ von Prägarben auf jedem $U \in \mathbf{C}$ einzeln mit dem System $(F_i(U))_{i \in I}$ und berücksichtigt bei der Konstruktion von Prägarben die Restriktionsabbildungen $F_i(U) \to F_i(V)$ für $V \to U$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, U)$. So definiert man über das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} F_i(U) \arrow[r, "\mathrm{res}_{V\to U}"] & \bigoplus_{i\in I} F_i(V) \\
F_i(U) \arrow[u] \arrow[r, "F_i(V\to U)"] & F_i(V) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} F_i$ und analog auch das direkte Produkt und die direkten und inversen Limites.

Es sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ ein Funktor. Dann ist

$$f^p : \mathbf{P}(\mathbf{C}') \to \mathbf{P}(\mathbf{C}), \quad (f^p F)(U) = F(f(U)) \tag{4.1}$$

für $U \in \mathbf{C}$ ein Funktor.

Proposition 4.0.2. *Der Funktor f^p ist exakt.*

Theorem 4.0.1 (Kan). *Es gibt einen zu f^p linksadjungierten Funktor $f_p : \mathbf{P}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}')$, der also natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(\mathbf{C}')}(f_p F, G) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(\mathbf{C})}(F, f^p G) \tag{4.2}$$

für alle $F \in \mathbf{P}(\mathbf{C})$ und $G \in \mathbf{P}(\mathbf{C}')$ induziert. Als linksadjungierter Funktor ist f_p rechtsexakt.

Beweis.

5

Čech-Kohomologie

5.1 Allgemeines

Es sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie mit Produkten und $(U_i \to V)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann existiert die Sequenz

$$V \longleftarrow (U_{i_0})_{i_0\in I} \;\substack{\xleftarrow{\hat 1} \\ \xleftarrow{\hat 0}}\; (U_{i_0} \times_V U_{i_1})_{(i_0,i_1)\in I^2} \;\substack{\xleftarrow{\hat 2} \\ \xleftarrow{\hat 1} \\ \xleftarrow{\hat 0}}\; (U_{i_0} \times_V U_{i_1} \times_V U_{i_2})_{(i_0,i_1,i_2)\in I^3} \;\substack{\xleftarrow{\hat 3} \\ \xleftarrow{\hat 2} \\ \xleftarrow{\hat 1} \\ \xleftarrow{\hat 0}}\; \cdots \tag{5.1}$$

Dabei ist $\hat\nu$ mit $\nu \in \{0,\cdots,p\}$ die kanonische Projektion von $U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p}$ unter Auslassung des ν-ten Faktors U_{i_ν}. Ist nun F eine Prägarbe auf $\mathbf{C}$, so entsteht daraus die Sequenz

$$\begin{aligned} F(V) \longrightarrow \textstyle\prod_{i_0\in I} F(U_{i_0}) \;\substack{\xrightarrow{F(\hat 0)} \\ \xrightarrow{F(\hat 1)}}\; \textstyle\prod_{(i_0,i_1)\in I^2} F(U_{i_0} \times_V U_{i_1}) \\ \substack{\xrightarrow{F(\hat 0)} \\ \xrightarrow{F(\hat 1)} \\ \xrightarrow{F(\hat 2)}}\; \textstyle\prod_{(i_0,i_1,i_2)\in I^3} F(U_{i_0} \times_V U_{i_1} \times_V U_{i_2}) \;\substack{\xrightarrow{F(\hat 0)} \\ \xrightarrow{F(\hat 1)} \\ \xrightarrow{F(\hat 2)} \\ \xrightarrow{F(\hat 3)}}\; \cdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir schreiben

$$\check{C}^p(\mathfrak{U}, F) = \prod_{(i_0,\ldots,i_p)\in I^{p+1}} F(U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p}) \tag{5.3}$$

mit der Abkürzung $\mathfrak{U}$ für $(U_i \to V)_{i\in I}$. Man führt nun die Abbildung

$$d^p : \check{C}^p(\mathfrak{U}, F) \to \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, F)$$

mit

$$d^p = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu F(\hat{\nu}) \tag{5.4}$$

ein und rechnet nach

$$d^{p+1} \circ d^p = 0 \tag{5.5}$$

Das Gebilde $(\check{C}^p(\mathfrak{U}, F), d^p)_{p \geqslant 0}$ ist also ein der Garbe F vermöge der Überdeckung zugeordneter Komplex abelscher Gruppen.

Die Zuordnung

$$F \mapsto (\check{C}^p(\mathfrak{U}, F), d^p)_p \tag{5.6}$$

ist sogar ein exakter kovarianter Funktor von der Prägarben-Kategorie $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ in die Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen $\mathbf{Cmplx}(\mathbf{Ab})$.

Ein Prägarbenmorphismus $f : F \to G$ liefert nämlich Morphismen

$$\begin{tikzcd}
F(U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p}) \arrow[r, "f_{U_{i_0 \ldots i_p}}"] \arrow[d, "F(\hat{\nu})"] & G(U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p}) \arrow[d, "G(\hat{\nu}"] \\
F(U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_{p+1}}) \arrow[r, "f_{U_{i_0 \ldots i_{p+1}}}"] & G(U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_{p+1}})
\end{tikzcd}$$

die sich zu Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^p(\mathfrak{U}, F) \arrow[r, "\check{C}^p(\mathfrak{U}, f)"] \arrow[d, "d_F^p"] & \check{C}^p(\mathfrak{U}, G) \arrow[d, "d_G"] \\
\check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, F) \arrow[r, "\check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, f)"] & \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, G)
\end{tikzcd}$$

zusammensetzen.

Definition 5.1.1. *Ist $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung wie oben und F eine abelsche Prägarbe auf* $\mathbf{C}$*, so sei*

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) = h^q(\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F)) \tag{5.7}$$

die q–te Čech–Kohomologie von F bezüglich $\mathfrak{U}$.

Anmerkung 5.1.1. Die Zuordnung $F \mapsto \check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$ ist ein Funktor von $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ nach $\mathbf{Ab}$.

Proposition 5.1.1. *Die $(\check{H}^q(\mathfrak{U}, F))_q$ bilden einen kohomologischen Funktor auf* $\mathbf{P}(\mathbf{C})$*, das heißt für eine exakte Sequenz von Prägarben*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0 \tag{5.8}$$

existiert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$
\begin{aligned}
&0 \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, F') \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, F'') \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, F') \to \cdots \\
&\quad \cdots \to \check{H}^{i-1}(\mathfrak{U}, F'') \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, F') \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, F) \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, F'') \to \cdots
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Proposition 5.1.2. *Es gibt für $\mathfrak{U} = (U_i \to U)_i$ eine funktorielle Abbildung*

$$F(U) \mapsto \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \tag{5.10}$$

die durch

$$s \in F(U) \mapsto (s_i = F(U_i \to U)(s))_i$$

induziert wird

5.2 Abbildungen von Überdeckungen und Homotopie

Es seien $\mathfrak{U} = (U_i \to V)_i$ und $\mathfrak{U}' = (U'_j \to V)_j$ zwei Überdeckungen von V und es sei f eine Abbildung $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ mit V–Morphismen $f_i : U_i \to U'_{a(i)}$ die Anlaß zu Morphismen

$$f_{i_0 \dots i_p} : U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p} \to U'_{a(i_0)} \times_V \cdots \times_V U_{a(i_p)}$$

Damit induziert f über die $F(f_{i_0 \dots i_p})$ einen Morphismus

$$f^* : \check{C}^p(\mathfrak{U}', F) \to \check{C}^p(\mathfrak{U}, F)$$

von Komplexen abelscher Gruppen.

Definition 5.2.1. *Eine Abbildung $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ wie oben ist eine* Verfeinerung von $\mathfrak{U}'$ zu $\mathfrak{U}$.

Proposition 5.2.1. *Eine Verfeinerung $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ induziert einen Morphismus von Funktoren*

$$f^* : \check{H}(\mathfrak{U}', F) \to \check{H}(\mathfrak{U}, F)$$

Es seien jetzt wieder $\mathfrak{U} = (U_i \to V)_i$ und $\mathfrak{U}' = (U'_j \to V)_j$ zwei Überdeckungen von V und es seien f, g zwei Verfeinerungen $f, g : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ mit V–Morphismen $f : U_i \to U'_{a(i)}$ und $g : U_i \to U'_{b(i)}$.

Proposition 5.2.2. *Es gibt dann eine Homotopie*

$$k^p : \check{C}^p(\mathfrak{U}', F) \to \check{C}^{p-1}(\mathfrak{U}, F)$$

für die gilt

$$(f^*)^p - (g^*)^p = d^{p-1}k^p + k^{p+1}d'^p$$

Beweis. Man definiert dafür die Abbildungen für $\nu = 0, \dots, p$

$$l^p_\nu : (U_{i_0} \times_V \cdots \times_V U_{i_p}) \to U'_{b(i_0)} \times_V \cdots \times_V U'_{b(i_\nu)} \times_V U'_{a(i_\nu)} \times_V \cdots \times_V U'_{a(i_p)} \quad (5.11)$$

symbolisch durch

$$l^p_\nu(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_p}) = (g(u_{i_0}), \dots, g(u_{i_\nu}), f(u_{i_\nu}), \dots, f(u_{i_p})) \quad (5.12)$$

und definiert

$$L^p_\nu : \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}', F) \to \check{C}^p(\mathfrak{U}, F) \quad (5.13)$$

durch

$$q_{i_0 \cdots i_p} L^p_\nu = F(l^p_\nu) q'_{b(i_0) \cdots b(i_\nu) a(i_\nu) \cdots a(i_p)}$$

Die Homotopie ist dann

$$k^{p+1} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu L^p_\nu \quad (5.14)$$

Es folgt deshalb

Proposition 5.2.3. *Die Abbildungen $f^*, g^* : \check{H}^p(\mathfrak{U}', F) \to \check{H}^p(\mathfrak{U}, F)$ sind identisch.*

6

Garben

Es sei T eine Grothendieck–Topologie und $\operatorname{Cat} T = \mathbf{C}$. Dann ist $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ die Kategorie der (abelschen) Prägarben auf T bzw. auf $\mathbf{C}$.

Es sei $(U_i \to U)_{i \in I} \in \operatorname{Cov} T$ eine Überdeckung von U und $F \in \mathbf{P}(\mathbf{C})$. Betrachte die Sequenz

$$F(U) \xrightarrow{q} \prod_{i \in I} F(U_i) \underset{p_1}{\overset{p_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I^2} F(U_i \times_U U_j) \tag{6.1}$$

Wir definieren:

Definition 6.0.1. *Es gelte*

(S1) Die Prägarbe F erfüllt die Bedingung (S1) für $(U_i \to U)_i$ wenn für $s_1, s_2 \in F(U)$ aus $q(s_1) = q(s_2)$ schon $s_1 = s_2$ folgt.
(S2) Die Prägarbe F erfüllt die Bedingung (S2) für $(U_i \to U)_i$, wenn für $(s_i) \in \prod_{i \in I} F(U_i)$ aus $p_1((s_i)) = p_2((s_i))$ schon $(s_i) = q(s)$ mit $s \in F(U)$ folgt.

Die Prägarbe F erfüllt die Bedingung (S1) bzw. (S2), wenn sie (S1) bzw. (S2) für jede Überdeckung $(U_i \to U)_{i \in I} \in \operatorname{Cov} T$ erfüllt.

Eine Prägarbe, die (S1) erfüllt heiße separiert.

Definition 6.0.2. *Eine Prägarbe auf $\mathbf{C} = \operatorname{Cat} T$, die (S1) und (S2) erfüllt, heiße* Garbe *auf $\mathbf{C}$. Mit der Festsetzung*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{S}(\mathbf{C})}(F, G) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{P}(\mathbf{C})}(F, G) \tag{6.2}$$

entsteht $\mathbf{S}(\mathbf{C})$, die Kategorie der Garben auf $\mathbf{C}$. Sie ist per Definition eine volle Unterkategorie von $\mathbf{P}(\mathbf{C})$ mit einem Inklusionsfunktor

$$i : \mathbf{S}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}(\mathbf{C})$$

Definition 6.0.3. *Es gibt einen Funktor $(-)^+ : \mathbf{P}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}(\mathbf{C})$ mit $F \mapsto F^+$ der durch*

$$F^+(U) = \check{H}^0(U,F) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U},F) \tag{6.3}$$

definiert ist, wobei $\mathfrak{U}$ *über die Überdeckungen*

$$J(U) = \{(U_i \to U)_i \in \operatorname{Cov} T\}$$

mit Bild gleich U *läuft. Einer Verfeinerung* $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ *aus* $\mathrm{Hom}_{J(U)}(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ *entspricht eine Abbildung* $f^* : \check{H}^0(\mathfrak{U}',F) \to \check{H}^0(\mathfrak{U},F)$ *und so wird* $J(U)$ *zur Indexkategorie des Funktors* $\mathfrak{U} \mapsto \check{H}^0(\mathfrak{U},F)$ *über die* $\varinjlim_{\mathfrak{U}}$ *gebildet wird.*

Ist $f : V \to U$ *in* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,U)$*, so existiert eine Abbildung*

$$f_* : J(U) \to J(V)$$

mit

$$\mathfrak{U} = (U_i \to U)_i \mapsto (U_i \times_U V \to V)_i = \mathfrak{U} \times_U V = f_*\mathfrak{U}$$

Die assoziierten Abbildungen $F(U_i) \xrightarrow{F(p_1)} F(U_i \times_U V)$ *definieren einen Morphismus* $f^* : \check{C}^p(\mathfrak{U},F) \to \check{C}^p(\mathfrak{U} \times_U V, F)$*, der zu einem Morphismus* $f^* : \check{H}^p(\mathfrak{U},F) \to \check{H}^p(\mathfrak{U} \times_U V, F)$ *Anlaß gibt.*

Der Morphismus

$$\begin{aligned}\check{H}^0(U,F) = \varinjlim_{\mathfrak{U}\in J(U)} \check{H}^0(\mathfrak{U},F) &\xrightarrow{\varinjlim f^*} \\ &\varinjlim_{\mathfrak{U}\in J(U)} \check{H}^0(\mathfrak{U} \times_U V, F) \to \varinjlim_{\mathfrak{V}\in J(V)} \check{H}^0(\mathfrak{V},F) = \check{H}^0(V,F)\end{aligned} \tag{6.4}$$

definiert die Restriktion $F^+(V \to U) : F^+(U) \to F^+(V)$.

Korollar 6.0.1. *Es gibt eine funktorielle Abbildung* $F \to F^+$*, die durch*

$$F(U) \to \check{H}^0(\mathfrak{U},F) \to \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U},F) = F^+(U)$$

induziert wird.

Proposition 6.0.1. *Ist* F *eine Prägarbe aus* $\mathbf{P}(\mathbf{C})$*, so ist* F^+ *eine separierte Prägarbe.*

Beweis. Es sei $s \in F^+(U)$ repräsentiert durch $(s_i \in F(U_i'))_i \in \check{H}^0(\mathfrak{U}',F)$ für eine Überdeckung $\mathfrak{U}' = (U_i' \to U)_i$. Weiter sei $(U_\alpha \to U)_\alpha$ eine Überdeckung mit $s_\alpha = \mathrm{res}^{F+}_{U_\alpha \to U}(s) = 0$ in $F^+(U_\alpha) = \check{H}^0(U_\alpha,F)$.

Betrachte die Überdeckungen $\mathfrak{U}_\alpha' = \mathfrak{U}' \times_U U_\alpha$ von U_α mit $(U_{i\alpha}' = U_i' \times_U U_\alpha \to U_\alpha)_i$. Man kann dann $s_\alpha \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_\alpha',F)$ als Element repräsentiert durch $s_\alpha = (s_{i\alpha} = F(U_{i\alpha}' \to U_i')(s_i) \in F(U_{i\alpha}'))_i$ wiederfinden, für das eine Verfeinerung $g_\alpha : \mathfrak{V}_\alpha \to \mathfrak{U}_\alpha'$ existiert, so daß $g_\alpha^*(s_\alpha) = 0 \in \check{H}^0(\mathfrak{V}_\alpha,F)$. Dabei sei $(V_{j\alpha} \to U_\alpha)_j$ die Überdeckung $\mathfrak{V}_\alpha$ von U_α und $g_{j\alpha} : V_{j\alpha} \to U_{i(j\alpha)\alpha}'$ die Verfeinerungsabbildungen über U_α.

Dieses $g_\alpha^*(s_\alpha)$ wird repäsentiert durch $(s_{j\alpha} := F(g_{j\alpha})(s_{i(j\alpha)\alpha}) = 0 \in F(V_{j\alpha}))_j$ Die Vereiningung aller $(U_\alpha \to U) \circ \mathfrak{V}_\alpha$ zu einem $\mathfrak{W} = (V_{j\alpha} \to U_\alpha \to U)_{j\alpha}$ von U ergibt dann mit $s' = (s_{j\alpha} = 0 \in F(V_{j\alpha}))_{j\alpha}$ das Nullelement $s' = 0$ von $\check{H}^0(\mathfrak{W}, F)$.

Nun ist $\mathfrak{W}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}'$ denn man hat eine Abbildung $h : \mathfrak{W} \to \mathfrak{U}'$ über U durch die Komposition $h_{j\alpha} : V_{j\alpha} \to U'_{i(j\alpha)} \times_U U_\alpha \to U'_{i(j\alpha)}$ als Abbildung über U. Es ist also wegen

$$0 = s_{j\alpha} = F(g_{j\alpha})F(U'_{i(j\alpha)\alpha} \to U'_{i(j\alpha)})(s_{i(j\alpha)}) = F(h_{j\alpha})(s_{i(j\alpha)})$$

auch $0 = s' = h^*(s)$ mit $h^* : \check{H}^0(\mathfrak{U}', F) \to \check{H}^0(\mathfrak{W}, F)$. Also ist $s = 0$ in $\varinjlim_{\mathfrak{U} \in J(U)} \check{H}(\mathfrak{U}, F) = F^+(U)$.

Die benutzten Kommutativitäten ergeben sich aus der Anwendung von F auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_{j\alpha} \arrow[rr, "g_{j\alpha}"] \arrow[dr, "h_{j\alpha}"'] \arrow[drrr] & & U'_{i(j\alpha)} \times_U U_\alpha \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& U'_{i(j\alpha)} \arrow[dr] & & U_\alpha \arrow[dl] \\
& & U &
\end{tikzcd} \tag{6.5}$$

Proposition 6.0.2. *Ist F eine separierte Prägarbe aus $\mathbf{P}(\mathbf{C})$, so ist F^+ eine Garbe.*

Beweis. Es sei $s_\alpha \in \check{H}^0(U_\alpha, F)$ repräsentiert zur $\mathfrak{U}_\alpha = (U_{i\alpha} \to U_\alpha)_i$ und $(s_{i\alpha})_i \in \prod_i F(U_{i\alpha})$.

Wir beginnen mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & \mathfrak{V}_{\alpha\beta} \arrow[d] & & \\
& & \mathfrak{U}_\alpha \times_U \mathfrak{U}_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& \mathfrak{U}_\alpha \times_U U_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & & U_\alpha \times_U \mathfrak{U}_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{U}_\alpha \arrow[dr] & & U_\alpha \times_U U_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{U}_\beta \arrow[dl] \\
& U_\alpha \arrow[dr] & & U_\beta \arrow[dl] & \\
& & U & &
\end{tikzcd} \tag{6.6}$$

also den Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
 & & & V_{\alpha\beta\gamma} \arrow[d, "h_\gamma"] & & & \\
 & & & U_{i\alpha} \times_U U_{j\beta} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & U_{i\alpha} \times_U U_\beta \arrow[dl] \arrow[drr] & & & & U_\alpha \times_U U_{j\beta} \arrow[dll] \arrow[dr] & \\
U_{i\alpha} \arrow[drr] & & & U_\alpha \times_U U_\beta \arrow[dl] \arrow[dr] & & & U_{j\beta} \arrow[dll] \\
 & & U_\alpha \arrow[dr] & & U_\beta \arrow[dl] & & \\
 & & & U & & &
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

für beliebige i, j unter Außerachtlassung von h bzw. für $i = i(\gamma)$ und $j = j(\gamma)$ mit der Verfeinerung $h : \mathfrak{V}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{U}_{\alpha\beta}$.

Für die Systeme der Schnitte ergibt sich

$$\begin{tikzcd}
 & & (s_{i\alpha j\beta})_{ij}, (s_{j\beta i\alpha})_{ij} \in \prod_{ij} F(U_{i\alpha} \times_U U_{j\beta}) & & \\
 & (s_{i\alpha\beta})_i \in \prod_i F(U_{i\alpha} \times U_\beta) \arrow[ur] & & (s_{j\beta\alpha})_j \in \prod_j F(U_\alpha \times U_{j\beta}) \arrow[ul] & \\
(s_{i\alpha})_i \arrow[ur] & & & & (s_{j\beta})_j \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{6.8}$$

mit $s_{i\alpha j\beta}, s_{j\beta i\alpha} \in F(U_{i\alpha} \times_U U_{j\beta})$.

Es gilt $(s_{i\alpha j\beta})_{ij} \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_\alpha \times \mathfrak{U}_\beta, F)$ und $(s_{j\beta i\alpha})_{ij} \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_\alpha \times \mathfrak{U}_\beta, F)$ was wir für $(s_{i\alpha j\beta})_{ij}$ mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{j'\beta}) \arrow[r] & F(U_{i\alpha} \times U_{i'\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{j'\beta}) \\
 & F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta})/s_{i\alpha j\beta} \arrow[ur] & & F(U_{i'\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{j'\beta}) \arrow[u] \\
F(U_{i\alpha})/s_{i\alpha} \arrow[ur] \arrow[d] & & F(U_{i'\alpha} \times U_{j'\beta})/s_{i'\alpha j'\beta} \arrow[ur] & \\
F(U_{i\alpha} \times U_{i'\alpha}) \arrow[uuurrr] & F(U_{i'\alpha})/s_{i'\alpha} \arrow[l] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{6.9}$$

zeigen.

Dabei repräsentiert $(s_{i\alpha j\beta})_{ij} \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_\alpha \times \mathfrak{U}_\beta, F)$ den Schnitt

$$\mathrm{res}^{F^+}_{U_\alpha \times U_\beta \to U_\alpha}(s_\alpha)$$

und $(s_{j\beta i\alpha})_{ij} \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_\alpha \times \mathfrak{U}_\beta, F)$ den Schnitt

$$\mathrm{res}^{F^+}_{U_\alpha \times_U U_\beta \to U_\beta}(s_\beta).$$

Beide Restriktionen sind gleich, was durch die Existenz der Verfeinerung $h : \mathfrak{V}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ ausgedrückt wird, so daß

$$h_\gamma^*(s_{i\alpha j\beta}) = h_\gamma^*(s_{j\beta i\alpha})$$

für $i = i(\gamma)$ und $j = j(\gamma)$ wird.

Aus der Gesamtheit der Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\alpha\beta\gamma} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta} \arrow[dl, "p'_\gamma"'] \arrow[dr, "h'_\gamma"] & & \\
V_{\alpha\beta\gamma} \arrow[dr, "h_\gamma"] & & U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta} \arrow[dl, "p_{ij}"'] \arrow[dr, "q'_{ij}"] & \\
 & U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \arrow[dr, "q_{ij}"] & & U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta} \arrow[dl] \\
 & & U_\alpha \times_U U_\beta &
\end{tikzcd} \tag{6.10}$$

wobei $i = i(\gamma)$ und $j = j(\gamma)$ durch die Verfeinerung $h : \mathfrak{V}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ gegeben ist, entsteht

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_\gamma F(V_{\alpha\beta\gamma} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) & & \\
\prod_\gamma F(V_{\alpha\beta\gamma}) \arrow[ur, "(p')^*"'] & & \prod_{ij} F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) \arrow[ul, "(h')^*"'] & \\
 & \prod_{ij} F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta}) \arrow[ul, "h^*"] \arrow[ur, "p^*"'] & & F(U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) \arrow[ul, "(q')^*"]
\end{tikzcd} \tag{6.11}$$

Man hat das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{ij} F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) \arrow[d] & \\
\prod_{ij} F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta}) \arrow[ur, "p^*"'] \arrow[d, "\pi_{ij}"] & F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta} \times U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) & F(U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) \arrow[ul, "(q')^*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
F(U_{i\alpha} \times U_{j\beta}) \arrow[ur, "F(p_1)=F(p_{ij})"'] & & F(U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}) \arrow[ul, "F(p_2)=F(q'_{ij})"]
\end{tikzcd} \tag{6.12}$$

Es gelten die Beziehungen

$$F(p_1)(s_{i\alpha j\beta}) = F(p_2)(s_{i_0\alpha j_0\beta})$$
$$F(p_1)(s_{j\beta i\alpha}) = F(p_2)(s_{j_0\beta i_0\alpha})$$

Also folgt

$$p^*((s_{i\alpha j\beta})_{ij}) = (q')^*(s_{i_0\alpha j_0\beta})$$
$$p^*((s_{j\beta i\alpha})_{ij}) = (q')^*(s_{j_0\beta i_0\alpha})$$

Nach Wahl von h ist

$$h^*((s_{i\alpha j\beta})_{ij}) = h^*((s_{j\beta i\alpha})_{ij})$$

also

$$
\begin{aligned}
(h')^*(q')^*(s_{i_0\alpha j_0\beta}) = (h')^* p^*((s_{i\alpha j\beta})_{ij}) = (p')^* h^*((s_{i\alpha j\beta})_{ij}) = \\
= (p')^* h^*((s_{j\beta i\alpha})_{ij}) = (h')^* p^*((s_{j\beta i\alpha})_{ij}) = (h')^*(q')^*(s_{j_0\beta i_0\alpha})
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Nun ist $(q'_{i(\gamma)j(\gamma)} \circ h'_\gamma)_\gamma$ aber eine Überdeckung von $U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta}$ und so ist, da F die Bedingung (S1) erfüllt, schon

$$
s_{i_0\alpha j_0\beta} = s_{j_0\beta i_0\alpha} \in F(U_{i_0\alpha} \times_U U_{j_0\beta}) \tag{6.14}
$$

also auch

$$
\begin{aligned}
F(U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta} \to U_{i_0\alpha})(s_{i_0\alpha}) = s_{i_0\alpha j_0\beta} = \\
= s_{j_0\beta i_0\alpha} = F(U_{i_0\alpha} \times U_{j_0\beta} \to U_{j_0\beta})(s_{j_0\beta})
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

Die Gesamtheit der $(s_{i\alpha})_{i\alpha}$ zu der Überdeckung $\mathfrak{W} = (U_{i\alpha} \to U)_{i\alpha}$ definiert also ein Element $s \in \check{H}^0(\mathfrak{W}, F)$ mit $\mathrm{res}^{F^+}_{U_\alpha \to U}(s) = s_\alpha$.

Theorem 6.0.1. *Der Funktor* $(-)^a : \mathbf{P}(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}(\mathbf{C})$*, der durch* $F \mapsto F^a = F^{++}$ *definiert ist, bildet Prägarben funktoriell in Garben ab. Er ist linksadjungiert zu* i*, es ist also*

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}(\mathbf{C})}(F^a, G) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(\mathbf{C})}(F, i(G))
$$

für eine Prägarbe $F \in \mathbf{P}(\mathbf{C})$ *und eine Garbe* $G \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$*.*

Anders gesagt: In jedem Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & F^a \arrow[d, dashed, "f'"] \\
F \arrow[ur] \arrow[r, "f"] & G
\end{tikzcd} \tag{6.16}
$$

mit einer Prägarbe F und einer Garbe G existiert die Abbildung f' und ist eindeutig bestimmt.