

FUNDAMENTALSÄTZE

Das Theorem über formale Funktionen

Es sei $f : X \rightarrow Y$ projektiv und $\mathcal{F}$ auf X kohärent.

Theorem 0.1. Dann ist

$$(1) \quad (R^i f_* \mathcal{F})_{\hat{y}} \cong \varprojlim_n H^i(X_Y^n, \mathcal{F}_n)$$

mit $X_Y^n = X \times_Y \mathcal{O}_{Y,Y}/\mathfrak{m}_Y^{i_n} \rightarrow X$ und $\mathcal{F}_n = i_n^* \mathcal{F}$.

Beweis. Man reduziert auf $X = \mathbb{P}_A^1$ mit $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring und der Garbensequenz

$$(\Delta) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

Betrachte dann das Diagramm

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccccc} H^i(\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_n H^i(\mathcal{G}_n) & & & & & & L_n H^{i+1}(\mathcal{G}_n) & & \\ \downarrow a & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow \\ L_n H^i(\mathcal{R}_n) & \longrightarrow & L_n H^i(\mathcal{E}_n) & \longrightarrow & L_n H^i(\mathcal{F}_n) & \longrightarrow & L_n H^{i+1}(\mathcal{R}_n) & \longrightarrow & L_n H^{i+1}(\mathcal{E}_n) \end{array}$$

Aus (Δ) leitet man ab mit $-\otimes_A A_n$ und $A_n = A/\mathfrak{m}^n$:

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow 0$$

dabei ist

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{G}/(\mathcal{G} \cap \mathfrak{m}^n \mathcal{E})$$

so daß man eine Surjektion

$$\alpha : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{R}_n$$

hat.

Nach Artin-Rees ist $\mathcal{G}_n \simeq \mathcal{R}_n$ für $n \geq n_0$. Damit sind die Abbildungen a und b im obigen Diagramm Isomorphismen.

Grothendiecks Verschwindungssatz

Theorem 0.2. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum und $\dim X = n$. Weiter sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X . Dann ist

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

für $i > n$.

Wir benötigen zur Vorbereitung eine Überlegung über induktive Limites von Garben.

Für eine Garbe $\mathcal{F}$ sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \mathcal{F}^D$ die welche Garbe der diskontinuierlichen Schnitte von $\mathcal{F}$.

Es ist für $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ immer

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{E} \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G}^D & \rightarrow & \mathcal{F}^D & \rightarrow & \mathcal{E}^D \rightarrow 0 \end{array}$$

Es sei $(\mathcal{F}_a)$ ein induktives System abelscher Garben auf X . Dann ist

$$(\varinjlim_a \mathcal{F}_a)(U) = \varinjlim_a (\mathcal{F}_a(U))$$

und

$$H^i(X, \varinjlim_a \mathcal{F}_a) = \varinjlim_a H^i(X, \mathcal{F}_a).$$

Man kann nämlich mit den diskontinuierlichen Schnitten welche Garbenkomplexe $0 \rightarrow \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_a^\bullet$ mit

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_a & \xrightarrow{\phi_{ab}} & \mathcal{F}_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_a^\bullet & \rightarrow & \mathcal{F}_b^\bullet \end{array}$$

bilden, die also mit den Systemabbildungen $\phi_{ab} : \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_b$ kommutieren.

Außerdem ist ein induktiver Limes eines Systems welcher Garben selbst welk, also $0 \rightarrow \varinjlim_a \mathcal{F}_a \rightarrow \varinjlim_a \mathcal{F}_a^\bullet$ eine welke Auflösung.

Damit ist alles auf die Beziehung $H\Gamma \varinjlim = H \varinjlim \Gamma = \varinjlim H\Gamma$ zurückgeführt.

Nachdem wir soweit sind benutzen wir die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_Y \rightarrow 0$$

mit $\mathcal{F}_U = j_* j^* \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_Y = i_* i^* \mathcal{F}$ um auf X irreduzibel zu reduzieren.

Mit den

$$\mathcal{F}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = \text{im}(\mathbb{Z}_{U_{\lambda_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{U_{\lambda_s}} \xrightarrow{(t_{\lambda_1}, \dots, t_{\lambda_s})} \mathcal{F})$$

für alle $t_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ ist

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \mathcal{F}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$$

so daß wir auf $\mathcal{F}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$ reduzieren können.

Mit

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}} \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

reduzieren wir auf

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

und bringen mit der auf irreduziblem X welchen Garbe $\mathbb{Z}$ die Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow 0$ ins Spiel, durch die wir mit Induktion über die Dimension von Y schon einmal $H^i(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $i > n$ erschließen.

Grothendiecks Existenzsatz

Es sei A ein noetherscher Ring, I -adisch vollständig bezüglich des Ideals $I \subseteq A$. Es sei $A_n = A/I^{n+1}$ und X ein A -Schema sowie $X_n = X \times_A A_n$.

Es sei $(\mathcal{F}_n)$ ein System kohärenter Garben auf den (X_n) mit

$$\mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{n+1}}} \mathcal{O}_{X_n} \cong \mathcal{F}_n$$

Existiert dann eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X mit

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_n} \cong \mathcal{F}_n$$

so sagen wir, daß für X/A der Grothendiecksche Existenzsatz gilt.

Lemma 0.1. Es sei

- (1) A ein noetherscher, graderter Ring mit $A_n = A/I^{n+1}$ gradiert und graderter Morphismen $A_{n'} \rightarrow A_n$. Es sei $\hat{A}$ seine I -adische Kompletzierung und damit $\hat{A}_n = A_n$.
- (2) (M_n) endlich erzeugte gradierte A_n -Moduln mit gradierten Abbildungen $M_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n \xrightarrow{\sim} M_n$.
- (3) Die Sequenz

$$0 \rightarrow I^{n+1} M_{n'} \rightarrow M_{n'} \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

für alle $n' > n$ exakt

Ist dann $M = \varprojlim_n M_n$ und ein homogenes Element $m \in M^d$ vom Grad d eines, für das für jede Projektion $m_k \in M_k^d$ gilt, so gibt es homogene Elemente $m_1, \dots, m_k \in M$, die M als $\hat{A}$ -Modul erzeugen und es ist $M \otimes_{\hat{A}} A_n = M_n$.

Beweis. Nach einem Standardsatz (Hartshorne II, Theorem 9.3A) ist M ein endlich erzeugter $\hat{A}$ -Modul mit $M \otimes_{\hat{A}} A_n = M_n$

Für ein $m \in M$ sei $m_k = \sum_{v=1}^p m_k^{d_v} \in M_k$ (endliche Summe!) das $m_k \neq 0$ mit minimalem k . Aus den $m_k^{d_v}$ leiten sich homogene $m^{d_v} \in M$ ab, so daß für $m' = m - \sum_{v=1}^p m^{d_v}$ das kleinste $m'_l \neq 0$ ein $l > k$ hat.

Also gibt es eine Folge von homogenen $m_i \in M^{d_i}$, so daß $\sum_{i=1}^l m_i \rightarrow m$ konvergiert. Da M noetherscher ist, wird $(m_1, \dots, m_l)_{\hat{A}}$ stationär und es ist m im Abschluß von $(m_1, \dots, m_s)_{\hat{A}}$. Also ist M im Abschluß des Bildes einer Abbildung $\hat{A}^k \rightarrow M$ mit $(f_1, \dots, f_k) \mapsto f_1 m_1 + \dots + f_k m_k$ mit $m_i \in M$ homogen und damit gleich diesem Bild.

Proposition 0.1. Es sei $B = A[x_1, \dots, x_r]$ ein graderter Polynomring.

Weiter seien M_n gradierte, endlich erzeugte B_n -Moduln mit gradierten Abbildungen

$$M_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n \rightarrow M_n.$$

Dann gibt es einen endlich erzeugten gradierten B -Modul M mit

$$M \otimes_B B_n = M_n$$

Beweis. Es sei $\hat{B}$ die I - B -adische Kompletzierung von B . Dann ist $\hat{M}_n = M_n$ als $B_n = \hat{B}_n$ -Modul.

Tensoriert man $0 \rightarrow I^{n+1}/I^{n'+1} \rightarrow A/I^{n'+1} \rightarrow A/I^{n+1} \rightarrow 0$ mit $-\otimes_A M_{n'}$ so erkennt man $0 \rightarrow I^{n+1} M_{n'} \rightarrow M_{n'} \rightarrow M_n \rightarrow 0$. Nach dem vorigen Lemma ist dann für $M' = \varprojlim_n M_n$, ein endlich erzeugter $\hat{B}$ -Modul,

$$M' \otimes_{\hat{B}} \hat{B}_n = M' \otimes_A A/I^{n+1} = M_n.$$

Für ein homogenes $\hat{B}$ -Erzeugendensystem $m'_1, \dots, m'_k \in M'$ betrachten wir das Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & B^k & \xrightarrow{a} & M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow w & & \downarrow j & & \downarrow i \\ 0 & \rightarrow & L' & \rightarrow & \hat{B}^k & \xrightarrow{b} & M' \rightarrow 0 \end{array}$$

wo a, b durch $(f_1, \dots, f_k) \mapsto f_1 m'_1 + \dots + f_k m'_k$ gegeben sind.

Die Abbildung w der Syzygien von $m'_1, \dots, m'_k$ ist wegen der Homogenität aller beteiligten Elemente surjektiv.

Tensorieren des Diagramms mit $-\otimes_B B_n$ macht $\bar{j}$ zum Isomorphismus, $\bar{w}$ bleibt surjektiv und $\bar{i}$ wird deshalb ein Isomorphismus.

M'' ist also der gesuchte Modul M . $\square$

Theorem 0.3. Für X/A projektiv, sogar für X/A eigentlich, gilt der Grothendiecksche Existenzsatz.

Kohomologie der projektiven Räume

Es sei A ein noetherscher Ring und $X = \mathbb{P}_A^n = \text{proj}(S)$ mit $S = A[x_0, \dots, x_n]$, graderter Ring. Dann gilt

Theorem 0.4. Es ist

- (1) $H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = S_d$
- (2) $H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ für $0 < i < n$.
- (3) Man hat eine Paarung

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1-d)) \times H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \rightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) = A$$

Beweis. Man setze $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(d)$. Dann ist

$$\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{S}) = \bigoplus_d S(d)_{(x_{i_0}, \dots, x_{i_p})} = S_{x_{i_0}, \dots, x_{i_p}}$$

Man betrachte weiter die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{S}(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow 0$. Es ist dann

$$(\square) \quad H^i(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{a} H^i(X, \mathcal{S}') \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{S}(-1)) \xrightarrow{\cdot x_n} H^{i+1}(X, \mathcal{S})$$

Die Abbildung a ist für $i < n-1$ surjektiv und es ist sogar $H^i(X, \mathcal{S}') = 0$ für $0 < i < n-1$. Dies gilt kraft Induktion, da $\mathcal{S}' = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{X'}(d)$ mit $X' = \text{proj}(A[x_0, \dots, x_{n-1}]) = \mathbb{P}_A^{n-1}$ ist.

Weiterhin ist $H^i(X, \mathcal{S})_{x_n} = H^i(D_+(x_n), \mathcal{S}) = 0$, wie man mittels Čech-Kohomologie und der Beziehung

$$\begin{aligned} ((\prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{S}(U_{i_0, \dots, i_p}))_p)_{x_n} &= ((\prod_{i_0 < \dots < i_p} S_{x_{i_0}, \dots, x_{i_p}})_p)_{x_n} = \\ &= (\prod_{i_0 < \dots < i_p} S_{x_{i_0}, \dots, x_{i_p}, x_n})_p = (\prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{S}(U_{i_0, \dots, i_p} \cap U_n))_p = \end{aligned}$$

erkennt. Da x_n in $(\square)$ injektiv ist, ist damit sogar $H^i(X, \mathcal{S}) = 0$ für $0 < i < n$, also (2) bewiesen.

Der Beweis von (3) kann durch direkte Berechnung der Čech-Kohomologien erbracht werden, der Beweis von (1) ebenso.