

## SYNOPSIS DER SCHNITTTHEORIE

### Längen

Ein Modul  $M$  heißt *einfach* wenn für  $N \subsetneq M$  immer  $N = 0$  gilt.

Ein Modul  $M$  hat *endliche Länge* wenn es eine Kette von Untermoduln

$$(0) = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \dots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

gibt, für die  $M_i/M_{i+1}$  immer einfach ist.

Es sei

$$(1) \quad 0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$$

exakt. Dann hat  $M$  endliche Länge, genau dann, wenn dies für  $N$  und  $P$  gilt.

**Beweis.** Um dies einzusehen betrachte man eine Kette  $\dots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq \dots$  wie oben für  $M$  und die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow (M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N) \rightarrow M_i/M_{i+1} \rightarrow (M_i + N)/(M_{i+1} + N) \rightarrow 0$$

Man erkennt, daß ein Elementarschritt in der Mitte immer einen Schritt entweder links oder rechts nach sich zieht.

Hat ein Modul  $M$  endliche Länge mit zwei Ketten  $(M_i)_{i=1}^r$  und  $(M'_j)_{j=1}^s$ , so setzt man in obiger Sequenz  $N = M'_1$  und erkennt induktiv  $r = s$ . Diese Zahl heißt dann  $\text{len}_A M$ , die  $A$ -Länge von  $M$ .

Für die Sequenz (1) gilt dann  $\text{len } M = \text{len } N + \text{len } P$ .

**Lemma 0.1.** Ist  $A$  ein noetherscher Ring und  $M$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul, so gibt es eine Filtrierung  $(0) \subseteq \dots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq \dots \subseteq M$  mit

$$0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow A/\mathfrak{p}_i \rightarrow 0$$

mit Primidealen  $\mathfrak{p}_i$  und  $\text{Ass } M \subseteq \{\mathfrak{p}_i\}$ .

Es ist äquivalent:

- (1)  $\text{len } M < \infty$ .
- (2) Alle  $\mathfrak{p}_i$  sind maximal.

Es sei  $A$  noethersch und  $\text{len } M < \infty$ . Dann ist

$$\text{len}_A M = \sum_{\mathfrak{p} \subseteq A} \text{len}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$$

Ein  $A_{\mathfrak{p}}$ -Modul  $M$  ist genau dann einfach, wenn er als  $A$ -Modul einfach ist. Daher ist dann auch  $\text{len}_A M = \text{len}_{A_{\mathfrak{p}}} M$ .

**Proposition 0.1.** Es seien  $(B, \mathfrak{q})$  und  $(A, \mathfrak{p})$  zwei lokale Artinringe und  $B$  eine flache  $A$ -Algebra. Dann ist

$$(2) \quad \text{len } B = (\text{len } A) \text{len}(B/\mathfrak{p}B)$$

### Herbrandquotienten

Es sei  $M$  ein  $A$ -Modul,  $\varphi: M \rightarrow M$  ein  $A$ -Endomorphismus dann sei  ${}_{\varphi}M = \ker \varphi$  sowie  $M_{\varphi} = M/\text{im } \varphi = \text{coker } \varphi$ .

**Definition 0.1.** Ist  $\text{len}_A {}_{\varphi}M < \infty$  und  $\text{len}_A M_{\varphi} < \infty$ , so ist

$$(3) \quad e_A(\varphi; M) = e(\varphi; M) = \text{len}_A M_{\varphi} - \text{len}_A {}_{\varphi}M$$

der Herbrandquotient von  $M$  bezüglich  $\varphi$ .

Ist  $A$  noethersch und  $M$  ein  $A$ -Modul, so ist

$$e_A(\phi, M) = \sum_{\mathfrak{p} \subseteq A} e_{A_{\mathfrak{p}}}(\phi_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$$

**Proposition 0.2.** Es sei  $M$  ein  $A$ -Modul wie oben und  $\varphi, \psi$  zwei Endomorphismen von  $M$ . Dann sind alle drei Herbrandquotienten  $e(\varphi; M)$ ,  $e(\psi; M)$ ,  $e(\psi\varphi; M)$  definiert, wenn zwei von ihnen es sind.

Es gilt dann auch

$$(4) \quad e(\psi\varphi; M) = e(\psi; M) + e(\varphi; M).$$

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & 0 \\ & & & \uparrow & & & \nearrow 0 \\ & & 0 \leftarrow M_{\psi} & \leftarrow M_{\psi\varphi} & & & \\ & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \psi & \\ & & M & & M & & \\ & \nearrow \varphi & \uparrow & \varphi & \uparrow & & \\ 0 \rightarrow & M & \rightarrow M & \rightarrow M & \rightarrow M_{\varphi} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \psi\varphi & \nearrow \psi & \downarrow \varphi & \uparrow X & & \\ & \psi\varphi M & \rightarrow M & \rightarrow \psi M & \rightarrow Y & \rightarrow 0 \\ & \nearrow & & \uparrow & & & \\ & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

**Lemma 0.2.** Sind für

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \rightarrow & P \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \rightarrow & P \rightarrow 0 \end{array}$$

zwei von den  $e_A(\phi, N)$ ,  $e_A(\psi, M)$ ,  $e_A(\chi, P)$  definiert, so auch der dritte und es ist

$$e_A(\psi, M) = e_A(\phi, N) + e_A(\chi, P)$$

**Lemma 0.3.** Es sei  $M = A^n$  ein endlich erzeugter freier  $A$ -Modul und  $\phi: M \rightarrow M$  ein  $A$ -linearer Endomorphismus. Dann ist  $e_A(\phi, M)$  genau dann definiert, wenn  $e_A(\det(\phi), A)$  definiert ist und es gilt

$$(6) \quad e_A(\phi, M) = e_A(\det(\phi), A)$$

**Beweis.** Ist  $e_A(\phi)$  wohldefiniert, so auch alle  $e_{A_{\mathfrak{p}}}(\phi_{\mathfrak{p}})$  für alle  $\mathfrak{p} \subseteq A$ , prim. Insbesondere ist  $\text{Ass}_{A_{\mathfrak{m}}}((M/\phi(M))_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{m}\}$  für endlich viele  $\mathfrak{m}$ , maximal. Es kann dann nicht

det  $\phi \in \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$  sein, denn dann wäre  $\text{rang}(\phi \otimes_A A/\mathfrak{p}) < n$  und  $\text{coker}(\phi \otimes_A A/\mathfrak{p}) = (\text{coker } \phi) \otimes_A A/\mathfrak{p}$  nicht von endlicher Länge. Also ist entweder det  $\phi \in A_{\mathfrak{m}}^*$  und  $e_A(\phi) = e_A(\det \phi) = 0$  oder  $\mathfrak{m} \supseteq (\det \phi)$  von der Höhe 1 oder 0. In beiden Fällen ist  $e_A(\det \phi)$  wohldefiniert, für  $A$  artinsch ist es selbstverständlich, ansonsten folgt es aus  $\text{Ann}(\det(\phi))_{\mathfrak{p}} = (0)$  für  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ .

Umgekehrt sei für det  $\phi = \delta$  die Funktion  $e_A(\delta)$  wohldefiniert, also  $A/\delta A$  und  $\ker \delta$  von endlicher Länge. Wegen  $\psi = \delta E = \phi \phi_{\text{ad}} = \phi_{\text{ad}} \phi$  ist  $M/\phi(M)$  ein Quotient von  $M/\psi(M)$  und  $\ker \phi \subseteq \ker \psi$ . Da  $M/\psi(M)$  und  $\ker \psi$  von endlicher Länge sind, gilt dies auch für  $M/\phi(M)$  und  $\ker \phi$ .

Um die Gleichheit  $e_A(\phi) = e_A(\det \phi)$  allgemein zu zeigen, beweisen wir sie erst für einen (lokalen) Ring  $(A, \mathfrak{m})$  der entweder ein Artinring oder eindimensional mit einem minimalen Primideal  $\mathfrak{p}$  ist. Ist  $\phi \sim R$  mit  $R \in \text{Mat}(A, n \times n)$ , so können wir  $T = RB$  mit

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \det \phi & t'_1 \\ 0 & t'_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & t'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Ist  $A$  eindimensional, so können wir  $b_1 \notin \mathfrak{p}$  annehmen, also die Wohldefiniertheit von  $e_A(b_1)$  also von  $e_A(B)$  und damit von  $e_A(T)$ ,

Da  $T$  und  $B$  die Zerlegung  $A^n = A \oplus A^{n-1}$  respektieren, folgt durch Induktion über  $n$  immer  $e_A(T) = e_A(\det T)$  und  $e_A(B) = e_A(\det B)$ . Weiterhin ist wegen  $T = RB$  auch det  $T = (\det R)(\det B)$  und damit  $e_A(T) = e_A(R) + e_A(B)$  sowie  $e_A(\det T) = e_A(\det R) + e_A(\det B)$ . Alles zusammen also  $e_A(R) = e_A(\det R)$ .

Der allgemeine Fall wird dann durch einen eindimensionalen lokalen Ring  $(A, \mathfrak{m})$  mit endlich vielen minimalen Primidealen  $\mathfrak{p}_i$  repräsentiert. Wir benutzen die übliche Filtrierung

$$0 \rightarrow \alpha_{i-1} \rightarrow \alpha_i \rightarrow A/\mathfrak{q}_i \rightarrow 0$$

wo  $\mathfrak{q}_i$  entweder ein  $\mathfrak{p}_i$  oder  $\mathfrak{m}$  ist. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \alpha_{i-1} \otimes_A M & \rightarrow & \alpha_i \otimes_A M & \rightarrow & (A/\mathfrak{q}_i)^n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_{i-1} & & \downarrow \phi_i & & \downarrow \psi_i \\ 0 & \rightarrow & \alpha_{i-1} \otimes_A M & \rightarrow & \alpha_i \otimes_A M & \rightarrow & (A/\mathfrak{q}_i)^n \rightarrow 0 \end{array}$$

liefert uns  $e_A(\phi_i) = e_A(\phi_{i-1}) + e_A(\psi_i)$  und ein analoges Diagramm für det  $\phi$  liefert  $e_A(\det \phi_i) = e_A(\det \phi_{i-1}) + e_A(\det \psi_i)$ . Nach Induktion ist  $e_A(\phi_{i-1}) = e_A(\det \phi_{i-1})$  und nach dem obigen Spezialfall auch  $e_A(\psi_i) = e_A(\det \psi_i)$ . Zusammen also  $e_A(\phi_i) = e_A(\det \phi_i)$  und deshalb am Ende der Induktionskette  $e_A(\phi) = e_A(\det \phi)$ .

**Lemma 0.4.** Es sei  $A$  ein eindimensionaler lokaler Ring mit minimalen Primidealen  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ . Weiter sei  $M$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul und  $a \in A$  mit  $a \notin \mathfrak{p}_j$  für alle  $j$ . Dann gilt

$$(8) \quad e_A(a, M) = \sum_{i=1}^t \text{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i) = \sum_{i=1}^t \text{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot \text{len}_A(A/(\mathfrak{p}_i, a))$$

### Die Funktion $\text{ord}_A$

Es sei  $A$  ein eindimensionaler Integritätsring mit Quotientenkörper  $K$ .

Dann existiert eine Abbildung

$$(9) \quad \text{ord}_A: K^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \text{ord}(f)$$

Diese ist folgendermaßen definiert:

Es sei  $f = a/s$ , mit  $a, s \in A - \{0\}$ , ein beliebiges Element von  $K^*$ . Definiere für  $a \in A$  die Abbildung  $\phi_a: A \rightarrow A$  mit  $\phi_a(x) = ax$  und setze

$$(10) \quad \text{ord}_A(a) = e_A(\phi_a; A) = \text{len}_A(A/aA)$$

Weiterhin setze

$$(11) \quad \text{ord}_A(f) = \text{ord}_A(a/s) = \text{ord}_A(a) - \text{ord}_A(s)$$

Es sei nun  $X$  ein integrales Schema und  $x \in X$  ein Punkt der Höhe 1. Dann ist  $A = \mathcal{O}_{X,x}$  ein eindimensionaler Integritätsring und es existiert damit auch die Abbildung  $\text{ord}_A$ , die wir auch mit  $v_x$  bezeichnen werden:

$$(12) \quad v_{\mathcal{O}_{X,x}} = v_x = \text{ord}: K(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f \mapsto v_x(f)$$

**Lemma 0.5.** Es sei  $A$  ein eindimensionaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper  $K = Q(A)$ . Weiter sei  $\phi: M \rightarrow M$  ein Endomorphismus eines endlich erzeugten  $A$ -Moduls  $M$  und  $\phi_K: M \otimes_A K \rightarrow M \otimes_A K$  der induzierte Endomorphismus. Wenn dann  $\det(\phi_K) \neq 0$  ist, so gilt

$$(13) \quad e_A(\phi, M) = \text{ord}_A(\det(\phi_K))$$

### Die Gruppe $A(X)$

Es sei  $X$  ein algebraisches Schema über dem Grundkörper  $K$ . Weiter sei

$$(14) \quad Z_k(X) = \bigoplus_{\substack{V \subseteq X \\ \dim V = k \\ V \text{ integer}}} \mathbb{Z} = \left\{ \sum_i m_i [V_i] \mid m_i \in \mathbb{Z}, V_i \text{ Untervarietät von } X \text{ mit } \dim V_i = k \right\}$$

**Definition 0.2.** Die Gruppe  $Z_k(X)$  ist die Gruppe der  $k$ -Zykel von  $X$ . Es sei  $Z_*(X) = \bigoplus_k Z_k(X)$ .

**Definition 0.3.** Ist  $X$  eine Varietät mit  $\dim X = n$  und  $f \in K(X)^*$  dann ist

$$(15) \quad \text{div}_X(f) = \text{div}(f) = \sum_{\substack{x \in X, \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} v_x(f) \{x\} \subseteq Z_{n-1}(X)$$

der Divisor von  $f$  auf  $X$ .

**Proposition 0.3.** Für  $X$  Varietät mit  $\dim X = n$  und  $f \in K(X)^*$  ist

$$(16) \quad \text{div}(f^{-1}) = -\text{div}(f) \in Z_{n-1}(X).$$

Ist  $X$  ein algebraisches Schema und  $W \subseteq X$  eine  $(k+1)$ -dimensionale Untervarietät sowie  $f \in K(W)^*$ , so ist

$$(17) \quad \operatorname{div}(f) = \sum \nu_{V_i}(f) [V_i]$$

eine formale Summe von  $k$ -dimensionalen Untervarietäten  $V_i$  von  $W$  und damit auch von  $X$ . Also ist  $\operatorname{div}(f) \subseteq Z_k(X)$ .

**Definition 0.4.** Ein Zykel  $\alpha \in Z_k(X)$  heißt rational äquivalent zu 0, geschrieben  $\alpha \sim 0$ , wenn ein System  $W_1, \dots, W_r \subseteq X$  von Varietäten und rationalen Funktionen  $f_i \in K(W_i)^*$  existiert, so daß

$$(18) \quad \alpha = \sum_{i=1}^r \operatorname{div}(f_i)$$

ist. Wir schreiben

$$(19) \quad \operatorname{Rat}_k(X) = \{\alpha \in Z_k(X) \mid \alpha \sim 0\}$$

**Proposition 0.4.** Die Menge  $\operatorname{Rat}_k(X)$  ist eine Untergruppe von  $Z_k(X)$ .

**Beweis.** Ist  $\alpha, \beta \sim 0$  mit  $\alpha = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i)$  und  $\beta = \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j)$ , so ist  $-\alpha = \sum \operatorname{div}_{W_i}(f_i^{-1}) \sim 0$  und  $\alpha + \beta = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i) + \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j) \sim 0$ .

**Definition 0.5.** Die Quotientengruppe  $Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X)$  ist  $A_k(X)$ , die Gruppe der  $k$ -Zykelklassen. Es sei  $A_*(X) = \bigoplus_k A_k(X)$

**Proposition 0.5.** Es sei  $X$  ein Schema und  $X_{\text{red}}$  sein reduziertes abgeschlossenes Unterschema. Dann ist  $Z_k(X) = Z_k(X_{\text{red}})$  und  $A_k(X) = A_k(X_{\text{red}})$ .

**Proposition 0.6.** Es sei  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  eine Zerlegung von  $X$  in disjunkte Komponenten. Dann ist  $Z_k(X) = Z_k(X_1) \oplus \dots \oplus Z_k(X_r)$  und  $A_k(X) = A_k(X_1) \oplus \dots \oplus A_k(X_r)$ .

**Proposition 0.7.** Es seien  $X_1, X_2 \subseteq X$  abgeschlossene Unterschemata von einem Schema  $X$ . Dann ist die Sequenz

$$(20) \quad A_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow A_k(X_1) \oplus A_k(X_2) \rightarrow A_k(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0$$

exakt.

**Beweis.** Man beachte, daß für jedes irreduzible  $Z \subseteq X_1 \cup X_2$  immer  $Z \subseteq X_1$  oder  $Z \subseteq X_2$  ist.

### Eigentlicher Push-forward

**Definition 0.6.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung algebraischer Schemata. Dann definiert  $f$  eine Abbildung  $Z_k(X) \rightarrow Z_k(Y)$  gemäß folgender Vorschrift

$$(21) \quad f_* V = \begin{cases} [k(V): k(W)] W & \text{für } W = f(V) \text{ falls } \dim W = \dim V = k \\ 0 & \text{falls } \dim f(V) \neq \dim V \end{cases}$$

für jede irreduzible  $k$ -dimensionale Varietät  $V \in Z_k(X)$  und entsprechender Erweiterung durch  $\mathbb{Z}$ -Linearität.

**Proposition 0.8.** Es seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  eigentliche Abbildungen algebraischer Schemata. Dann ist  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

**Proposition 0.9.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung algebraische Schemata. Dann ist  $f_* \operatorname{Rat}_k(X) \subseteq \operatorname{Rat}_k(Y)$ . Also induziert  $f_*$  eine Abbildung  $f_*: A_k(X) \rightarrow A_k(Y)$ .

Diese Behauptung folgt aus zwei Hauptpropositionen. Zunächst die erste Hauptproposition:

**Proposition 0.10.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche, surjektive Abbildung von  $l$ -Varietäten. Weiter sei  $\dim X = k+1$  und  $\dim Y \leq k$ , sowie  $r \in K(X)^*$ . Dann ist

$$(22) \quad f_* \operatorname{div}_X(r) = 0$$

**Lemma 0.6.** Es sei  $f: X \rightarrow l$  eine eigentliche eindimensionale  $l$ -Varietät über einem Körper  $l$ . Weiter sei  $r \in K(X)^*$  eine rationale Funktion auf  $X$ . Dann ist mit einer Summe über die abgeschlossenen Punkte  $P \in X$ :

$$(23) \quad \operatorname{div}_X(r) = \sum_{P \in X} \nu_P(r) P = \sum_{P \in X} n_P P$$

und es gilt

$$(24) \quad \sum_{P \in X} n_P [k(P): l] = 0$$

**Lemma 0.7.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung von  $l$ -Varietäten und  $\dim X = k+1$  sowie  $\dim Y = k$ . Weiter sei  $j: Y' = \operatorname{Spec}(K(Y)) \rightarrow Y$  die kanonische Abbildung des generischen Punktes, eine flache Abbildung. Man habe das cartesische Diagramm

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y' \end{array}$$

Es ist dann  $X'$  eine eindimensionale, eigentliche  $K(Y)$ -Varietät. Weiterhin induzieren  $j$  und  $j'$  Abbildungen  $j^*: Z_k(X) \rightarrow Z_0(X')$  und  $j^*: Z_k(Y) \rightarrow Z_0(Y')$ , für die gilt

$$(26) \quad f'_* j'^* \alpha = j^* f_* \alpha$$

für einen Zykel  $\alpha \in Z_k(X)$ . Die Abbildung  $j^*: Z_k(Y) \rightarrow Z_0(Y')$  ist ein Isomorphismus. Schließlich ist für ein  $r \in K(X)^*$  und sein Bild  $r' \in K(X')^*$  unter der kanonischen Abbildung  $K(X) \rightarrow K(X')^*$ :

$$(27) \quad j'^* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_{X'}(r')$$

Nun zur zweiten Hauptproposition:

**Proposition 0.11.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche, surjektive Abbildung von  $l$ -Varietäten. Weiter sei  $\dim X = \dim Y = k+1$ . Dann ist  $L = K(X)$  eine endliche Erweiterung von  $K = K(Y)$  und für  $r \in K(X)^*$  gilt

$$(28) \quad f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y \operatorname{Norm}_{[L:K]}(r)$$

**Definition 0.7.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung von integren Schemata und  $L = K(X)$  eine endliche Erweiterung von  $K = K(Y)$ . Damit ist die Abbildung

$$\operatorname{Norm}_{[L:K]}: L \rightarrow K$$

definiert. Gilt nun für jedes  $r \in L^*$  sowie  $y \in Y$  mit  $\operatorname{ht} y = 1$  und mit den endlich vielen  $x_1, \dots, x_m \in X$  mit  $f(x_i) = y$  und  $\operatorname{ht} x_i = 1$ , daß

$$(29) \quad \sum_{i=1}^m \nu_{x_i}(r) [k(x_i): k(y)] = \nu_y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$$

gilt, so sagen wir, daß  $f: X \rightarrow Y$  die Eigenschaft  $(Nm)$  hat.

**Proposition 0.12.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche surjektive Abbildung algebraischer Varietäten. Die Eigenschaft  $(Nm)$  habe. Mit  $L = K(X)$  sowie  $K = K(Y)$  gilt dann:

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$$

für jedes  $r \in L^*$ .

**Lemma 0.8.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Schemaabbildung und  $V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$  mit der kanonischen Abbildung  $g: V \rightarrow Y$  für ein  $y \in Y$ . Weiter sei

$$X' = X \times_Y V$$

und  $p: X' \rightarrow X$  die kanonische Projektion. Dann gilt

- (1)  $p$  induziert einen Homöomorphismus  $p: X' \rightarrow f^{-1}(g(V))$ .
- (2) Es ist für  $x' \in X'$  und  $x \in X$  mit  $p(x') = x$  auch  $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x'}$ .
- (3) Ist  $X$  integer, so ist auch  $X'$  integer und es ist  $K(X) = K(X') = L$ . Für ein  $r \in L^*$  und  $x, x'$  wie oben mit  $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$  ist dann auch  $\nu_x(r) = \nu_{x'}(r)$ .

**Lemma 0.9.** Es sei  $B \supseteq A$  eine endliche Erweiterung von Integritätsringen und  $L = Q(B)$ , sowie  $K = Q(A)$ . Weiter sei  $(A, \mathfrak{m})$  ein eindimensionaler lokaler Ring und  $B_i = B_{\mathfrak{q}_i}$  für die  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$  mit  $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{m}$ . Dann ist für jedes  $r \in L^*$  die Gleichung

$$(30) \quad \sum_{i=1}^m \nu_{B_i}(r) [k(B_i): k(A)] = \nu_A(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$$

erfüllt.

Anders ausgedrückt: Die Abbildung  $f: \operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$  hat die Eigenschaft  $(Nm)$ .

**Proposition 0.13.** Es sei  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  die kanonische eigentliche Abbildung von der Normalisierung  $\tilde{X}$  einer Varietät  $X$  nach  $X$ . Dann ist  $f$  sogar eine endliche Abbildung und es gilt:

$f$  hat die Eigenschaft  $(Nm)$ .

**Proposition 0.14.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine dominante Abbildung von Varietäten. Weiter seien  $\tilde{X} \rightarrow X$  und  $\tilde{Y} \rightarrow Y$  die Abbildungen der jeweiligen Normalisierungen. Dann existiert genau eine Abbildung  $g: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ , so daß

$$(31) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

kommutiert. Ist  $f$  eigentlich, so ist auch  $g$  eigentlich. Hat  $g$  die Eigenschaft  $(Nm)$ , so hat auch  $f$  die Eigenschaft  $(Nm)$ .

**Proposition 0.15.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive, endliche, also auch eigentliche, Abbildung von Varietäten  $X$  und  $Y$ . Es sei  $L = K(X)$  und  $K = K(Y)$ . Dann hat  $f$  die Eigenschaft  $(Nm)$ .

**Lemma 0.10.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit  $\dim X = \dim Y$ . Weiter sei  $L = K(X)$  und  $K = K(Y)$ . Es sei  $A = \mathcal{O}_{Y,y}$  für einen Punkt  $y \in Y$  der Höhe 1 und es sei

$$V = \operatorname{Spec}(A).$$

Weiter sei  $C$  der ganze Abschluß von  $A$  in  $L$  und  $X_V = X \times_Y V$ .

Dann ist  $\dim \operatorname{Spec}(C) = 1$  und es existiert ein kommutatives Diagramm

$$(32) \quad \begin{array}{ccc} X_V & \xrightarrow{g} & \operatorname{Spec}(C) \\ \downarrow & \swarrow & \\ V & & \end{array}$$

in dem  $g$  ein Isomorphismus ist

**Proposition 0.16.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit  $\dim X = \dim Y$ . Es sei  $L = K(X)$  und  $K = K(Y)$  sowie  $r \in L^*$ . Dann hat  $f: X \rightarrow Y$  die Eigenschaft  $(Nm)$ .

### Algebraische Zykel von Schemata und Unterschemata

**Definition 0.8.** Es sei  $X$  ein algebraisches Schema und  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  seine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist  $[X] \in Z_*(X)$  definiert als

$$(33) \quad [X] = \sum_{i=1}^r m_i [X_i]$$

wobei  $m_i = \operatorname{len} \mathcal{O}_{X,X_i}$  ist. Wir nennen  $m_i$  die geometrische Multiplizität von  $X_i$  in  $X$ . Gegebenenfalls schreiben wir auch  $[X]$  für das Bild von  $[X]$  unter  $Z_*(X) \rightarrow A_*(X)$ .

**Bemerkung 0.1.** Ist  $X \subseteq Y$  ein abgeschlossenes Unterschema, so schreiben wir auch  $[X]$  für das Bild von  $[X]$  unter der Abbildung  $Z_*(X) \rightarrow Z_*(Y)$ . Ebenso stehe  $[X]$  auch für das Bild von  $[X]$  in  $A_*(Y)$ .

**Bemerkung 0.2.** Ist  $X$  rein  $k$ -dimensional, also  $\dim X_i = k$  für alle  $i$ , so ist  $[X] \in Z_k(X)$  und es ist  $A_k(X) = Z_k(X) = \{\sum n_i [X_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$ .

**Bemerkung 0.3.** Es sei  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  und  $X = \operatorname{Spec}(A/I)$  für ein Ideal  $I \subseteq A$ . Weiter sei  $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten, also minimale Primideale über  $I$ . Dann ist  $m_i = \operatorname{len}(A/I)_{\mathfrak{p}_i}$ .

### Flacher pull-back

Eine flache Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  sei hier stets eine flache Abbildung der Relativdimension  $n$ , wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt. Beispiele solcher Abbildungen sind:

- (1) Eine offene Einbettung  $U \subseteq X$  (Relativdimension 0)

- (2) Die Projektion eines Vektorbündels  $p : E \rightarrow X$  oder eine  $\mathbb{A}^n$ -Bündels oder eines projektiven Bündels  $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ .
- (3) Die Projektion  $p : Y \times_k Z \rightarrow Y$  für ein algebraisches Schema  $Z \rightarrow k$  der reinen Dimension  $n$ .
- (4) Ein dominanter Morphismus  $f : X \rightarrow C$  von einer  $n$ -dimensionalen Varietät auf eine nichtsinguläre Kurve  $C$ . (Relativdimension  $n-1$ ).

**Definition 0.9.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension  $n$ . Weiter sei  $V \subseteq Y$  eine Untervarietät. Dann sei

$$(34) \quad f^*(V) = [f^{-1}(V)].$$

Diese Festsetzung dehnt sich  $\mathbb{Z}$ -linear zu einer Abbildung

$$(35) \quad f^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_{k+n}(X)$$

aus.

**Lemma 0.11.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  ein flacher Schemamorphismus. Dann ist für jedes Unterschema  $Z \subseteq Y$

$$(36) \quad f^*([Z]) = [f^{-1}(Z)].$$

**Beweis.** Man führt alles zurück auf  $\text{len } B = \text{len}(B/pB) \text{len } A$  für  $(B, q)/(A, p)$ , flache Erweiterung lokaler Artinringe.

**Korollar 0.1.** Es seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  flache Morphismen mit Relativdimension. Dann ist auch  $g \circ f$  ein solcher, und es gilt

$$(37) \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

**Proposition 0.17.** Es sei

$$(38) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

ein cartesisches Quadrat mit  $g$  flach und  $f$  eigentlich. Dann ist  $g'$  flach und  $f'$  eigentlich und es gilt

$$(39) \quad f'_* g'^* \alpha = g^* f_* \alpha$$

in  $Z_* Y'$  für alle  $\alpha \in Z_* X$ .

**Beweis.** Es ist oBdA  $Y$  affin und mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V \times_Y U & \longrightarrow & Y' \times_Y U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

führt man alles auf  $X, Y, Y', X'$  affin zurück. Es ergibt sich:

$$(40) \quad \begin{array}{ccccc} b \subseteq s_1, \dots, s_m & \longleftarrow & & \longleftarrow & q \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & B' & \longleftarrow & B \\ & \swarrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & A' & \longleftarrow & A \\ a \subseteq r & \longleftarrow & & \longleftarrow & p \end{array}$$

mit  $a = p \otimes_A A' = pA'$  und  $b = q \otimes_B B' = qB'$ . und  $A'/A$  flach. Tensoriere mit  $A/p$  und betrachte das Diagramm von Artinringen, das in den Ringen  $(B'/pB')_{s_i} = B'_i$  kulminiert:

$$\begin{array}{ccccc} (\bar{B}'_i, s_i) & & & & \\ \uparrow & & & & \\ \bar{B}'/\tau \bar{B}' & \longleftarrow & \bar{B}' & \longleftarrow & (\bar{B}, q) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bar{A}'/\tau & \longleftarrow & (\bar{A}', \tau) & \longleftarrow & (\bar{A}, p) \end{array}$$

Wir vereinfachen es noch zu  $(p=0, A=k(p))$

$$\begin{array}{ccc} (B'_i, q'_i) & & \\ \uparrow & & \\ B' & \longleftarrow & (B, q) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (A', p') & \longleftarrow & (A, p) \end{array}$$

Es sei  $0 \rightarrow b_{i-1} \rightarrow b_i \rightarrow B/q \rightarrow 0$  eine Filtrierung aus  $e$  Sequenzen. Wir betrachten die Tensorierungen mit  $- \otimes_A A'$ . Zunächst ist (symbolisch geschrieben)

$$|B'/qB'| = \sum |B'_i/qB'_i| = \sum m_i |B'_i/q'_i| = \sum m_i s_i |A'/p'|$$

Also  $|B \otimes_A A'| = |B'| = e |B'/qB'| = e \sum (s_i m_i) |A'/p'|$ .

Andererseits entspricht  $|B/q| = s |A/p|$  und  $|A'/pA'| = n |A'/p'|$ . Also  $|B'/qB'| = sn |A'/p'|$ .

Also  $e sn = e \sum m_i s_i$ . Kürzt man  $e$  ergibt sich die gewünschte Beziehung

$$\sum s_i m_i = sn.$$

**Theorem 0.1.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  ein flacher Morphismus der relativen Dimension  $n$ . Weiter sei  $\alpha \in Z_k Y$  mit  $\alpha \sim 0$ , also rational äquivalent zu Null. Dann ist  $f^* \alpha \sim 0$  in  $Z_{k+n} X$ .

**Korollar 0.2.** Die Abbildung  $f^* : Z_* Y \rightarrow Z_* X$  induziert eine Abbildung  $f^* : A_* Y \rightarrow A_* X$ .

**Lemma 0.12.** Es sei  $X$  ein rein  $n$ -dimensionales Schema mit irreduziblen Komponenten  $X_1, \dots, X_r$  und geometrischen Multiplizitäten  $m_1, \dots, m_r$ . Weiter sei  $D$  ein effektiver Cartierdivisor auf  $X$ , also ein Unterschema, das lokal auf  $U \subseteq X$ , affin, offen, durch einen Nichtnullteiler  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  gegeben ist. Es sei  $D_i = D \cap X_i$  die Restriktion von  $D$  auf  $X_i$ . Dann gilt

$$(41) \quad [D] = \sum_{i=1}^r m_i [D_i]$$

in  $Z_{n-1}(X)$ .

### Eine exakte Sequenz

**Proposition 0.18.** Es sei  $i : Y \rightarrow X$  die Inklusion eines abgeschlossenen Unterschemas  $Y$  von  $X$ . Weiter sei  $U = X - Y$  und  $j : U \rightarrow X$  die entsprechende Inklusion. Dann ist die Sequenz

$$(42) \quad A_k Y \xrightarrow{i_*} A_k X \xrightarrow{j^*} A_k U \rightarrow 0$$

exakt für alle  $k$ .

**Beweis.** Betrachte das Diagramm

$$(43) \quad \begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ A_k Y & \xrightarrow{i_*} & A_k X & \xrightarrow{j^*} & A_k U & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ Z_k Y & \xrightarrow{i_*} & Z_k X & \xrightarrow{j^*} & Z_k U & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{Rat}_k Y & \xrightarrow{\phi} & \text{Rat}_k X & \xrightarrow{\psi} & \text{Rat}_k U & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

wo in der untersten Sequenz die Beziehung  $\psi \circ \phi = 0$  offensichtlich gilt.

**Proposition 0.19.** Es sei

$$(44) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

ein cartesisches Quadrat von Schemata, wo  $i$  eine abgeschlossene Immersion und  $p$  eigentlich ist. Weiter induziere  $p$  einen Isomorphismus  $p' : X' - Y' \rightarrow X - Y$ . Dann ist die Sequenz

$$(45) \quad A_k Y' \xrightarrow{a} A_k Y \oplus A_k X' \xrightarrow{b} A_k X \rightarrow 0$$

mit  $a(\alpha) = (q_*(\alpha), -i'_*(\alpha))$  und  $b(a_1, a_2) = i_* a_1 + p_* a_2$  exakt.

**Beweis.** Betrachte für alles folgende das Diagramm

$$(46) \quad \begin{array}{ccccccc} A_k Y' & \xrightarrow{i'_*} & A_k X' & \xrightarrow{j^*} & A_k U' & \longrightarrow & 0 \\ q_* \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p'_* & & \\ A_k Y & \xrightarrow{i_*} & A_k X & \xrightarrow{j^*} & A_k U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit dem Isomorphismus  $p' : U' = X' - Y' \rightarrow X - Y = U$  und den Inklusionen  $j : U \rightarrow X$  und  $j' : U' \rightarrow X'$ .

Es bleibt noch die Identität  $\ker i_* = q_* \ker i'_*$ . Die Inklusion  $q_* \ker i'_* \subseteq \ker i_*$  ist klar. Sei also  $\alpha \in A_k Y$  mit  $i_* \alpha = 0$ . Wir ziehen jetzt auch das Diagramm

$$(47) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_k Y' & \xrightarrow{i'_*} & Z_k X' & \xrightarrow{j^*} & Z_k U' \longrightarrow 0 \\ q_* \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p'_* & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_k Y & \xrightarrow{i_*} & Z_k X & \xrightarrow{j^*} & Z_k U \longrightarrow 0 \end{array}$$

heran.

### Affine Bündel

Ein Schema  $E$  zusammen mit einem Morphismus  $p : E \rightarrow X$  heißt *affines Bündel* (vom Rang  $n$ ), wenn es eine offene Überdeckung  $(U_\alpha)$  von  $X$  mit offenen Mengen gibt, so daß die Abbildungen

$$(48) \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{g_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{A}^n \\ p \downarrow & \swarrow & \uparrow \\ U_\alpha & & \end{array}$$

kommutieren und alle  $g_\alpha$  Isomorphismen sind.

**Proposition 0.20.** Es sei  $p : E \rightarrow X$  ein affines Bündel vom Rang  $n$  und  $X$  ein noethersches Schema. Dann ist der flache pull-back

$$(49) \quad p^* : A_k X \rightarrow A_{k+n} E$$

surjektiv für alle  $k$ .

### Weildivisoren und Cartierdivisoren

Es sei  $X$  ein Schema und  $\text{OuvAff}(X)$  die Kategorie der affinen offenen Teilmengen  $U = \text{Spec}(A)$  von  $X$  mit den durch die Abbildungen  $A \rightarrow A_f$  induzierten offenen Immersionen als Morphismen.

Weiter sei für jeden Ring  $A$  die multiplikativ abgeschlossene Menge  $S_A$  gleich der Menge der Nichtnullteiler von  $A$ , also der  $f \in A$  mit  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} A$  injektiv. Wir nennen dann  $Q(A) = S_A^{-1} A$  den *Funktionenkörper* von  $A$ . Es gibt kanonische Abbildungen  $Q(A) \rightarrow Q(A_g)$  für jedes  $g \in A$ .

Die Zuordnung  $\mathcal{K}(U) = Q(\mathcal{O}_X(U))$  für jedes  $U \subseteq X$ , offen, affin, definiert also eine Prägarbe  $\mathcal{K}_X$  auf **OuvAff**( $X$ ), deren Garbifizierung eine Garbe auf  $X$  ist, die wir ebenfalls mit  $\mathcal{K}_X$  bezeichnen.

Es seien  $\mathcal{O}_X^*(U)$  und  $\mathcal{K}_X^*(U)$  die multiplikativen Gruppen, der von 0 verschiedenen Elemente von  $\mathcal{O}_X(U)$  und  $\mathcal{K}_X(U)$ . Diese definieren eine exakte Sequenz von multiplikativen abelschen Garben

$$(50) \quad 1 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 1$$

**Definition 0.10.** Es sei  $X$  ein Schema. Dann ist  $\Gamma(X, \mathcal{D}) = \text{CaDiv } X$  die (abelsche) Gruppe der Cartier–Divisoren von  $X$ .

Ein Cartier–Divisor  $D$  kann also als Familie  $(f_i, U_i)$  mit einer offenen Überdeckung  $\bigcup_i U_i = X$  und  $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$  angesehen werden, für die  $g_{ij} = f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$  ist, mit  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ . Die Summe zweier Cartierdivisoren  $D = (f_i, U_i)$  und  $D' = (f'_i, U_i)$  ist  $D + D' = (f_i f'_i, U_i)$ , der inverse Cartierdivisor  $-D$  ist  $(f_i^{-1}, U_i)$ .

**Definition 0.11.** Es sei  $X$  ein Schema. Ein Cartier–Divisor der Form  $(f, X)$  mit  $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$  heißt Hauptdivisor, geschrieben  $\text{div}(f) = (f)$ .

**Proposition 0.21.** Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe  $\text{CaDiv}^h X \subseteq \text{CaDiv } X$ .

**Definition 0.12.** Sind  $D, D' \in \text{CaDiv } X$  und ist  $D - D'$  ein Hauptdivisor, so heißen  $D, D'$  linear äquivalent.

**Definition 0.13.** Die Quotientengruppe

$$(51) \quad \text{CaCl } X = \text{CaDiv } X / \text{CaDiv}^h X$$

ist die Gruppe der Cartierdivisorenklassen auf  $X$ .

**Definition 0.14.** Es sei  $X$  ein Schema und  $D = (f_i, U_i)$  ein Cartier–Divisor auf  $X$ . Weiter sei  $V \subseteq X$  eine 1–kodimensionale Untervarietät von  $X$ . Dann ist

$$(52) \quad \nu_V(D) = \nu_{\mathcal{O}_{X,V}}(f_i)$$

für ein  $i$  mit  $U_i \cap V \neq \emptyset$ . Da  $f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$  ist die Definition von dem gewählten  $i$  unabhängig.

**Definition 0.15.** Es sei  $X$  eine Varietät mit  $\dim X = n$ . Dann ist

$$(53) \quad \text{Div } X = Z_{n-1}(X)$$

die Gruppe der Weildivisoren von  $X$  und

$$(54) \quad \text{Cl } X = A_{n-1}(X) = Z_{n-1}(X) / \text{Rat}_{n-1}(X)$$

die Gruppe der Weildivisorenklassen von  $X$ .

**Definition 0.16.** Es sei  $X$  eine Varietät mit  $\dim X = n$  und  $D = (f_i, U_i)$  ein Cartierdivisor auf  $X$ . Dann ist

$$(55) \quad [D] = \sum_V \nu_V(D) V \in \text{Div } X = Z_{n-1}(X)$$

wobei  $V$  durch die 1–kodimensionalen Varietäten  $V \subseteq X$  läuft, der zu  $D$  assoziierte Weil–Divisor.

**Proposition 0.22.** Es sei  $X$  eine Varietät mit  $\dim X = n$ . Dann definiert  $D \mapsto [D]$  einen Gruppenhomomorphismus

$$(56) \quad \text{CaDiv } X \rightarrow \text{Div } X$$

von den Cartierdivisoren in die Weildivisoren.

Dabei wird  $\text{CaDiv}^h X$  nach  $\text{Rat}_{n-1}(X)$  abgebildet, denn es ist

$$(57) \quad [\text{div}(f)] = \text{div}_X(f)$$

mit dem weiter oben eingeführten  $\text{div}_X(f) \in \text{Rat}_{n-1}(X) \subseteq Z_{n-1}(X)$ . Man hat also auch eine induzierte Abbildung

$$(58) \quad \text{CaCl } X \rightarrow \text{Cl } X$$

**Definition 0.17.** Es sei  $X$  ein Schema und  $D = (f_i, U_i) \in \text{CaDiv } X$  ein Cartierdivisor auf  $X$ . Dann ist

$$(59) \quad |D| = \text{supp } D = \bigcup_{\substack{V \subseteq X \\ V \text{ Varietät} \\ f_V \notin \mathcal{O}_{X,V}^*}} V \quad \text{wobei } f_V = f_i \text{ mit } U_i \cap V \neq \emptyset$$

der Support von  $D$  in  $X$ . Die Definition ist wegen  $f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$  unabhängig von der Wahl des jeweiligen  $i$  für  $V$ .

**Bemerkung 0.4.** Auf  $U = X - |D|$  ist  $\mathcal{O}_X(D)|_U \cong \mathcal{O}_U$ . Damit existiert ein der  $1 \in \mathcal{O}_U$  entsprechender trivialisierender Schnitt  $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ .

**Bemerkung 0.5.** Wir können den zu einem Cartierdivisor  $D$  assoziierten Weildivisor  $[D]$  auch schreiben als

$$(60) \quad [D] = \sum_V \nu_V(D) V$$

wobei  $V$  jetzt nicht durch alle 1–kodimensionalen Varietäten  $V \subseteq X$  läuft, sondern nur durch diejenigen mit  $V \subseteq |D|$ . Damit erkennen wir  $[D] \in Z_{n-1}(|D|)$ .

Neben der Zuordnung eines Weildivisors zu jedem Cartierdivisor auf einer Varietät  $X$  können wir auf einem beliebigen Schema  $X$  einem Cartierdivisor  $D = (f_i, U_i)$  ein Linienbündel  $\mathcal{O}_X(D)$  zuordnen.

**Definition 0.18.** Es sei  $X$  ein Schema und  $D = (f_i, U_i)$  aus  $\text{CaDiv } X$ . Dann ist  $\mathcal{O}_X(D)$  mit

$$(61) \quad \mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1} \mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i}$$

ein Linienbündel zusammen mit einer Inklusion  $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$ .

**Bemerkung 0.6.** Wir schreiben auch manchmal  $L(D)$  für  $\mathcal{O}_X(D)$ .

Es seien  $L, L_1, L_2$  Linienbündel auf einem Schema  $X$ . Dann sind auch

$$L^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X) \text{ und } L_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} L_2$$

Linienbündel auf  $X$ . Die erste Abbildung definiert dabei ein Inverses für die Multiplikation, die durch die zweite Abbildung gegeben wird. Dabei ist  $\mathcal{O}_X$ , als Linienbündel aufgefaßt, das neutrale Element.

**Definition 0.19.** Wir bezeichnen die Gruppe der Linienbündel auf einem Schema  $X$  mit  $\mathbf{L}(X)$  und die Gruppe der Isomorphieklassen von Linienbündeln mit  $\text{Pic } X$ .

**Proposition 0.23.** Für ein Schema  $X$  ist  $\text{Pic } X = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ .

Für einen Cartierdivisor  $D = (f_i, U_i)$  gibt es ein kanonisch zugeordnetes Element  $c(D) \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ . Dieses wird durch  $U_{i_0 i_1} \mapsto f_{i_0}^{-1} f_{i_1}$  als Element von  $\check{H}^1((U_i), \mathcal{O}_X^*)$  gegeben.

**Proposition 0.24.** Es sei  $X$  ein beliebiges Schema. Die Abbildung  $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$  definiert einen Gruppenhomomorphismus  $\text{CaDiv } X \rightarrow \mathbf{L}(X)$ . Es ist also

$$(62) \quad \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') = \mathcal{O}_X(D + D')$$

$$(63) \quad \mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_X(D)^{-1}$$

**Proposition 0.25.** Es sei  $X$  ein Schema,  $D$  ein Cartierdivisor und  $\mathcal{O}_X(D)$  das zugeordnete Linienbündel. Dann ist äquivalent

(1) Es ist  $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ .

(2) Es ist  $D \in \text{CaDiv}^h X$ , ein Hauptdivisor.

Es ist also  $c(D) = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$  genau für die Hauptdivisoren  $D \in \text{CaDiv}^h X$ . Damit ist  $D \mapsto c(D)$  eine wohldefinierte und injektive Abbildung  $\text{CaCl } X \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ . Weiterhin ergeben die beiden vorangehenden Propositionen eine injektive Abbildung  $\text{CaCl } X \rightarrow \text{Pic } X$ .

**Proposition 0.26.** Wir haben ein Diagramm

$$(64) \quad \begin{array}{ccc} \text{CaCl } X & \xrightarrow{\beta} & \text{Pic } X \\ \downarrow \alpha & \swarrow \gamma & \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & & \end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen  $\alpha, \beta, \gamma$  die oben eingeführten, insbesondere ist  $\alpha(D) = c(D)$ . Die Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  sind injektiv, die Abbildung  $\gamma$  ist, wie oben bemerkt, ein Isomorphismus.

**Proposition 0.27.** Ist  $X$  eine Varietät, so ist  $\text{CaCl } X \rightarrow \text{Pic } X$  auch surjektiv, also ein Isomorphismus.

Dies folgt, da für eine Varietät  $X$  die Garbe  $\mathcal{K}_X$  welk ist, aus der exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$  und der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz.

**Definition 0.20.** Es sei  $X$  ein beliebiges Schema und  $D = (f_i, U_i)$  ein Cartierdivisor. Weiter sei  $\mathcal{O}_X(D)$  das assoziierte Linienbündel  $(f_i^{-1} \mathcal{O}_{U_i})$ . Es sei  $Z = |D|$  der Support von  $D$  und  $U = X - Z$ , sowie  $U'_i = U_i \cap U$ . Es ist dann  $f_i|_{U'_i} \in \mathcal{O}_X^*(U'_i)$ , also  $1 \in f_i^{-1} \mathcal{O}_{U'_i} \subseteq \mathcal{K}_X(U'_i)$ .

Die einzelnen  $1 = 1_{U'_i}$  verkleben zu einem Schnitt  $1 \in \mathcal{O}_X(D)(U) \subseteq \mathcal{K}_X(U)$ . Diesen nennen wir auch  $s_D$ .

## Pseudodivisoren

**Definition 0.21.** Es sei  $X$  ein Schema und  $(L, Z, s)$  ein Tripel bestehend aus einem Linienbündel  $L$  auf  $X$ , einer abgeschlossenen Teilmenge  $Z \subseteq X$  und einem nirgends verschwindenden Schnitt  $s \in L(X - Z)$ .

Dann heißt  $(L, Z, s)$  Pseudodivisor auf  $X$ . Es heißen  $L$  das Linienbündel,  $Z$  der Support und  $s$  der Schnitt des Pseudodivisors.

**Definition 0.22.** Zwei Pseudodivisoren  $(L, Z, s)$  und  $(L', Z', s')$  auf einem Schema  $X$  heißen äquivalent, wenn  $Z = Z'$  ist und ein  $\mathcal{O}_X$ –Isomorphismus  $\sigma : L \rightarrow L'$  existiert, so daß  $\sigma_{X-Z}(s) = s'$  ist.

**Definition 0.23.** Es sei  $D$  ein Cartier–Divisor auf einem Schema  $X$ . Weiter sei  $\mathcal{O}_X(D)$  sein zugehöriges Linienbündel,  $|D|$  sein Support und  $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(X - |D|)$  sein assoziierter trivialisierender Schnitt. Dann ist  $(\mathcal{O}_X(D), |D|, s_D)$  der zu  $D$  gehörige Pseudodivisor.

**Definition 0.24.** Ein Pseudodivisor  $(L, Z, s)$  wird von einem Cartier–Divisor  $D$  repräsentiert, falls

(1)  $|D| \subseteq Z$  gilt.

(2) Ein Isomorphismus  $\sigma : \mathcal{O}_X(D) \rightarrow L$  existiert, der auf  $X - Z$  den Schnitt  $s_D$  in  $s$  überführt.

**Proposition 0.28.** Es sei  $X$  eine Varietät und  $(L, Z, s)$  ein Pseudodivisor auf  $X$ . Dann wird  $(L, Z, s)$  durch einen Cartier–Divisor  $D \in \text{CaDiv } X$  repräsentiert.

Es gilt

(1) Ist  $Z \neq X$ , so ist  $D$  als Element von  $\text{CaDiv } X$  eindeutig bestimmt.

(2) Ist  $Z = X$ , so ist  $D$  als Element von  $\text{CaCl } X$ , also als Divisorenklasse eindeutig bestimmt.

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung, da durch sie später für eine  $k$ –Untervarietät  $j : V \subseteq X$  eines beliebigen Schemas  $X$  und einen Pseudodivisor  $D$  auf  $X$ , der Schnitt  $D \cdot [V] = [j^* D] \in A_{k-1}(|D| \cap V)$  eingeführt werden wird.

**Definition 0.25.** Es sei  $D$  ein Pseudodivisor auf einer  $n$ –dimensionalen Varietät  $X$  mit Support  $Z = |D|$ .

Dann definiert man die zugehörige Weildivisorenklasse

$$(65) \quad [D] \in A_{n-1}(|D|)$$

wie folgt:

Es sei  $\tilde{D}$  ein Cartierdivisor auf  $X$ , der  $D$  repräsentiert.

(1) Ist  $Z \neq X$ , so ist  $\tilde{D}$  als Element von  $\text{CaDiv } X$  eindeutig bestimmt. Wir setzen dann

$$(66) \quad [D] = [\tilde{D}]$$

Dabei ist  $[\tilde{D}]$  der zu  $\tilde{D}$  assoziierte Weildivisor aufgefaßt als Zykel in  $Z_{n-1}(|\tilde{D}|)$ , also

$$[\tilde{D}] = \sum_V \text{ord}_V(\tilde{D}) [V] \in Z_{n-1}(|\tilde{D}|) = A_{n-1}(|\tilde{D}|)$$

wobei über die irreduziblen Komponenten  $V$  von  $|\tilde{D}|$  summiert wird.

Da  $|\tilde{D}| \subseteq |D| = Z$  erhalten wir ein Bild in  $Z_{n-1}(|D|) = A_{n-1}(|D|)$

(2) Ist  $Z = X$ , so ist  $\tilde{D}$  als Element von  $\text{CaCl } X$  eindeutig bestimmt, also für einen repräsentierenden Divisor  $\tilde{D}$  ist  $[\tilde{D}] \in Z_{n-1}(X)$  bis auf Elemente von  $\text{Rat}_{n-1}(X)$  eindeutig bestimmt. Damit ist  $[\tilde{D}]$  in  $A_{n-1}(X) = A_{n-1}(|D|)$  eindeutig festgelegt.

**Definition 0.26.** Es seien  $D = (L, Z, s)$  und  $D' = (L', Z', s')$  zwei Pseudodivisoren auf einem Schema  $X$ .  
Dann sei

$$(67) \quad D + D' = (L \otimes_{\mathcal{O}_X} L', Z \cup Z', s \otimes s')$$

$$(68) \quad -D = (L^{-1}, Z, s^{-1})$$

**Proposition 0.29.** Für ein festes  $Z \subseteq X$  bilden die Pseudodivisoren  $D$  mit  $\text{supp } D = Z$  eine abelsche Gruppe.

**Definition 0.27.** Es sei  $f : X' \rightarrow X$  ein Schemamorphismus und  $D = (L, Z, s)$  ein Pseudodivisor auf  $X$ . Dann ist  $f^*D = (f^*L, f^{-1}(Z), f^*(s))$  der pull-back von  $D$  auf  $X'$ .

**Proposition 0.30.** Für  $g : X'' \rightarrow X'$  und  $f : X' \rightarrow X$  sowie einen Pseudodivisor  $D$  auf  $X$  gilt

$$(69) \quad g^*f^*(D) = (f \circ g)^*(D)$$

Weiterhin gilt für Pseudodivisoren  $D, D'$  auf  $X$ , daß

$$(70) \quad f^*(D + D') = f^*D + f^*D'$$

mit der oben eingeführten Addition von Pseudodivisoren.

### Schnitte mit Divisoren

**Definition 0.28.** Es sei  $D$  ein Pseudodivisor auf einem Schema  $X$  und  $V$  eine  $k$ -dimensionale Untervarietät von  $X$  mit Einbettung  $j : V \rightarrow X$ . Dann ist  $j^*D$  ein Pseudodivisor auf  $V$  mit  $|j^*D| = V \cap |D|$ .

Dann sei

$$(71) \quad D \cdot [V] = D \cdot V = [j^*D] \in A_{k-1}(V \cap |D|)$$

**Bemerkung 0.7.** Ist  $D$  ein Cartier-Divisor auf  $X$ , so kann man  $D \cdot [V]$  auch folgendermaßen konstruieren: Ist  $|D| \not\supseteq V$ , so ist  $j^*D$  ein Cartierdivisor auf  $V$ . Man bilde den zu  $j^*D$  assoziierten Weildivisor in  $Z_{k-1}(|D| \cap V)$  und nenne sein Bild in  $A_{k-1}(|D| \cap V)$  dann  $D \cdot [V]$ .

Ist  $|D| \supseteq V$ , so wähle einen Cartier-Divisor  $C$  auf  $V$ , so daß  $\mathcal{O}_V(C) \cong j^*\mathcal{O}_X(D)$  ist. Dann sei  $D \cdot [V]$  das Bild des zu  $C$  assoziierten Weildivisors  $[C]$  aus  $Z_{k-1}(V)$  in  $A_{k-1}(V)$ . Der Divisor  $C$  ist nur bis auf einen Hauptdivisor bestimmt, aber sein Bild in  $A_{k-1}(V)$  ist eindeutig.

**Bemerkung 0.8.** Wir nennen  $D \cdot [V]$  auch das Bild von  $D \cdot [V]$  in jedem  $A_{k-1}(Y)$  für jedes abgeschlossene Unterschema  $Y \subseteq X$  mit  $V \cap |D| \subseteq Y$ .

**Bemerkung 0.9.** Ist für ein Schema  $X$  das Linienbündel  $\mathcal{O}_X(D)$  auf  $|D|$  trivial, so kann man sogar eine Abbildung  $Z_k(X) \rightarrow Z_{k-1}(|D|)$  konstruieren. Man setze für  $j : V \rightarrow X$  dann  $D \cdot V = [j^*D]$  falls  $V \not\subseteq |D|$  und  $D \cdot V = 0$ , falls  $V \subseteq |D|$ . Im letzteren Fall würde die explizite Konstruktion von oben die Wahl eines Cartier-Divisors  $C$  auf  $V$  verlangen, für den  $\mathcal{O}_V(C) = j^*\mathcal{O}_X(D)$  ist. Da  $j^*\mathcal{O}_X(D)$  wegen  $j(V) \subseteq |D|$  und der Annahme vom Anfang trivial ist, muß auch  $\mathcal{O}_V(C) = \mathcal{O}_V$  sein. Es ist dann sinnvoll  $D \cdot V = 0$  zu setzen.

Der Fall  $\mathcal{O}_X(D)$  auf  $|D|$  trivial tritt zum Beispiel für (global) prinzipale Cartierdivisoren  $D$  auf, diese werden unter der kanonische Abbildung  $\text{CaDiv } X \rightarrow \text{Pic } X$  auf die Isomorphieklasse des trivialen Bündels  $\mathcal{O}_X$  abgebildet.

**Definition 0.29.** Es sei  $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$  ein algebraischer Zykel im Schema  $X$ . Dann ist  $|\alpha| = \bigcup_{n_V \neq 0} V$ , der Support von  $\alpha$ .

**Definition 0.30.** Ist  $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$  ein algebraischer Zykel, so definieren wir

$$(72) \quad D \cdot \alpha = \sum_V n_V (D \cdot [V]) \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|)$$

**Bemerkung 0.10.** Für jedes abgeschlossene Unterschema  $Y \subseteq X$  mit  $|D| \cap |\alpha| \subseteq Y \subseteq X$  sei  $D \cdot \alpha$  auch das Bild von  $D \cdot \alpha \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|)$  unter  $A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \rightarrow A_{k-1}(Y)$ .

### Proposition 0.31.

a) Es sei  $D$  ein Pseudodivisor auf  $X$  und  $\alpha, \alpha' \in Z_k(X)$ . Dann ist

$$(73) \quad D \cdot (\alpha + \alpha') = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha'$$

in  $A_{k-1}(|D| \cap (|\alpha| \cup |\alpha'|))$ .

b) Es seien  $D, D'$  Pseudodivisoren auf  $X$  und  $\alpha \in Z_k(X)$ . Dann ist

$$(74) \quad (D + D') \cdot \alpha = D \cdot \alpha + D' \cdot \alpha$$

in  $A_{k-1}((|D| \cup |D'|) \cap |\alpha|)$

c) Es sei  $D$  ein Pseudodivisor auf  $X$  und  $f : X' \rightarrow X$  ein eigentlicher Schemamorphismus,  $\alpha \in Z_k(X')$  und

$$g : f^{-1}(|D|) \cap |\alpha| \rightarrow |D| \cap f(|\alpha|).$$

Dann ist

$$(75) \quad g_*(f^*D \cdot \alpha) = D \cdot f_*\alpha$$

in  $A_{k-1}(|D| \cap f(|\alpha|))$ .

d) Es sei  $D$  ein Pseudodivisor auf  $X$  und  $f : X' \rightarrow X$  ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension  $n$ . Weiter sei  $\alpha \in Z_k(X)$  und

$$g : f^{-1}(|D| \cap |\alpha|) \rightarrow |D| \cap |\alpha|.$$

Dann ist:

$$(76) \quad f^*(D) \cdot f^*\alpha = g^*(D \cdot \alpha)$$

in  $A_{k+n-1}(f^{-1}(|D|) \cap |\alpha|)$ .

e) Ist  $D$  ein Pseudodivisor auf  $X$  mit trivialem Linienbündel  $L_D$  auf  $X$  und  $\alpha \in Z_k(X)$ , dann ist

$$(77) \quad D \cdot \alpha = 0$$

in  $A_{k-1}(|\alpha|)$ .

Wir betrachten für die beiden folgenden Lemmata cartesische Quadrate

$$(78) \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y' \end{array}$$

mit offenen Immersionen  $j, j'$ .

**Lemma 0.13.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes  $D$ , Pseudodivisor auf  $Y'$  und  $\alpha \in Z_k(X')$ :

$$(79) \quad f'_*(f'^*D \cdot \alpha) = D \cdot f'_*\alpha$$

Dann gilt die Aussage c) der vorigen Proposition für  $f : X \rightarrow Y$ .

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} j^*(f_*(f^*D \cdot \alpha)) &= f'_*j'^*(f^*D \cdot \alpha) = f'_*(j'^*f^*D \cdot j'^*\alpha) = \\ &= f'_*(f'^*j^*D \cdot j'^*\alpha) = j^*D \cdot f'_*j'^*\alpha = j^*D \cdot j^*f_*\alpha = j^*(D \cdot f_*\alpha) \end{aligned}$$

Da die  $f' : X' \rightarrow Y'$  eine Überdeckung von  $f : X \rightarrow Y$  darstellen, gilt die Aussage c) für  $f$  unter der Annahme, daß sie für alle  $f'$  gilt.

**Lemma 0.14.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine flache Abbildung mit Relativdimension  $n$  und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes  $D$ , Pseudodivisor auf  $Y'$  und  $\alpha \in Z_k(Y')$ :

$$(80) \quad f'^*D \cdot f'^*\alpha = f'^*(D \cdot \alpha)$$

Dann gilt die Aussage d) der vorigen Proposition für  $f : X \rightarrow Y$ .

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} j'^*(f'^*D \cdot f'^*\alpha) &= j'^*f'^*D \cdot j'^*f'^*\alpha = f'^*j^*D \cdot f'^*j^*\alpha = \\ &= f'^*(j^*D \cdot j^*\alpha) = f'^*j^*(D \cdot \alpha) = j'^*f^*(D \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Da die  $f' : X' \rightarrow Y'$  eine Überdeckung von  $f : X \rightarrow Y$  darstellen, gilt die Aussage d), falls sie für alle  $f'$  gilt.

**Lemma 0.15.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  ein flacher Morphismus mit Relativdimension  $n$ . Weiter sei  $D$  ein effektiver Cartierdivisor auf  $Y$ . Dann ist

$$(81) \quad [f^*D] = [f'^{-1}(D)] = f^*[D]$$

**Beweis.** Man habe das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & U \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & V \end{array}$$

mit  $V = \text{Spec}(A)$  und  $U = \text{Spec}(B)$ , offen. Es sei  $D$  auf  $V$  gegeben als  $(a)$  mit einem Nichtnullteiler  $a \in A$ . Dann ist auch  $f^*D|_U = (a)$  mit  $a$  aufgefaßt als Element von  $B$ . Wegen  $0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A$  und der exakten Tensorierung  $- \otimes_A B$  ist  $a$  auch in  $B$  Nichtnullteiler. Es ist also

$$[f'^*D] = [\text{Spec}(B/aB)] = [\text{Spec}(B \otimes_A A/a)] = [f'^{-1}(D)] = f'^*[D]$$

Man nehme nun im folgenden an, daß die Aussage des Lemmas für  $f$  eine offene Inklusion schon richtig sei.

Damit ist dann

$$\begin{aligned} j'^*[f^*D] &= [j'^*f^*D] = [f'^*j^*D] = f'^*[j^*D] = f'^*[j^{-1}(D)] = f'^*j^*[D] = \\ &= j'^*f^*[D] = j'^*[f^{-1}(D)] \end{aligned}$$

Da  $U, V$  allgemein gewählt waren, folgt  $[f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D]$ .

**Lemma 0.16.** Es sei  $f : X \rightarrow V$  ein flacher Morphismus mit Relativdimension  $n$  und  $V$  eine Varietät. Weiter sei  $D$  ein effektiver Cartierdivisor auf  $V$  und es sei

$$[X] = \sum_i l_i [X_i]$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, notwendig gleicher Dimension  $\dim V + n$ . Dann ist

$$(82) \quad f^*D \cdot f^*[V] = [f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V])$$

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} f^*D \cdot f^*[V] &= f^*D \cdot [X] = f^*D \cdot \left( \sum_i l_i [X_i] \right) = \\ &= \sum_i l_i (f^*D \cdot [X_i]) = \sum_i l_i [f^*D \cap X_i] = \\ &= [f^*D \cap X] = [f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

Nun schließlich zum Beweis von d):

**Beweis.** Man habe im allgemeinen Fall das cartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & f^{-1}(V) \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & V \end{array}$$

wobei man durch weitere Lokalisierung und Ausnutzen der Additivität in  $D$  annehmen kann, daß  $D$  auf  $Y$  ein effektiver Cartierdivisor ist. Dann gilt mit  $\tilde{D} = j^*D$ :

$$\begin{aligned} f^*(D) \cdot f^*[V] &= f^*(D) \cdot f^*j_*[V] = f^*(D) \cdot j'_*f'^*[V] = \\ &= j'_*(j'^*f^*(D) \cdot f'^*[V]) = j'_*(f'^*j^*(D) \cdot f'^*[V]) = \\ &= j'_*(f'^*\tilde{D} \cdot f'^*[V]) = j'_*f'^*(\tilde{D} \cdot [V]) = \\ &= f^*j_*(j^*D \cdot [V]) = f^*(D \cdot j_*[V]) = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

### Gerstenhaber-Algebra

Es sei  $A$  eine affine  $k$ -Algebra und  $I \subseteq A$  ein Ideal.

Die Aufblasung von  $A[T]$  in  $(T, I)$  ist

$$B = A[T, W, T, W] = A[T] \oplus (TA, I)W \oplus (T^2A, TI, I^2)W^2 \oplus \dots$$

Die Gerstenhaber-Algebra  $B^\circ$  ist

$$B^\circ = B_{(W,T)} = A[T, T^{-1}I] = \dots \oplus T^d A \oplus \dots \oplus TA \oplus A \oplus T^{-1}I \oplus T^{-2}I^2 \oplus \dots$$

Es ist  $B_0 = B/TB$  gleich

$$B/TB = A \oplus (TA + I)W \oplus (T^2A + TI + I^2)W^2 \oplus \dots$$

denn man hat ( $W^2$ -Term als Beispiel, links  $A[T]$ -, rechts  $A$ -Module):

$$(T^2 A, T I, I^2)/(T^3 A, T^2 I, T I^2) = (T^2 A + T I + I^2)$$

Also  $B_0 = B/TB = S[T]$  mit

$$S = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots$$

Damit zerfällt  $\text{proj}(B/TB)$  in  $\text{proj}(S)$  und  $\text{Spec}(S)$ .

Tensoriert man weiter mit  $-\otimes_A A/I$ , so entsteht

$$B'_0 = A/I \oplus (TA/I + I/I^2)W \oplus (T^2 A/I + T I/I^2 + I^2/I^3)W^2 \oplus \dots$$

Dieses  $B'_0 = S'[T]$  zerfällt in  $\text{proj}(S')$  und  $\text{Spec}(S') = C_I A$ , den *Normalkegel von A über I*.

$$S' = A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots$$

Der Ring  $S'$  ist zugleich auch  $B^\circ/TB^\circ$  also die Faser von  $B^\circ$  über  $T=0$ . Die übrigen Fasern ergeben sich durch  $B^\circ[T^{-1}] = A[T, T^{-1}]$  als  $A$ .

### Grassmann-Varietäten

Es sei  $V = K^n$  für einen Körper  $K$  und  $(0) = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n = V$  eine echt aufsteigende Filtrierung. Für ein  $K^k \cong \Lambda \subseteq V$  seien  $a_i$  mit  $i = 1, \dots, k$  durch

$$\dim(V_{i+n-k-a_i} \cap \Lambda) = i$$

festgelegt.

Schreibt man  $\Lambda$  als Repräsentant einer  $GL(k, K)$ -Bahn von  $K^{k \times n}$  so hat man für die  $\Lambda$  zu einem System  $(a_i)$  die allgemeine Matrixdarstellung nach Durchführung einer Zeilenreduktion:

$$\begin{array}{cccccccccc} n & \vdots & k+n-k- & \vdots & 3+n-k- & \vdots & 2+n-k- & \vdots & 1+n-k- & n-k- & \vdots \\ & & a_k & & a_3 & & a_2 & & a_1 & a_1 & \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & * & \vdots \\ 2 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & * & \vdots \\ 3 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & * & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & * & \vdots \end{array}$$

Es ist  $n-k \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0$  und alle möglichen Kombinationen von  $(a_i)$  können für geeignete  $\Lambda$  auftreten. Die Gesamtheit der  $\Lambda \subseteq V$  bildet die *Grassmann-Varietät*  $G(k, n)$ . Es ist

$$\dim G(k, n) = k(n-k)$$

und die Gesamtheit der  $\Lambda$  zu einem System  $a_i$  bildet einen affinen *Schubert-Zykel*  $\Sigma_{a_1, \dots, a_k}$ . Er hat die Dimension

$$\dim \Sigma_{a_i} = k(n-k) - |(a_i)|.$$

für  $|(a_i)| = \sum a_i$  wie man aus obigem Matrixschema durch Abzählen der freien Koeffizienten (angedeutet durch  $*$ ) erkennt.

Die Gesamtheit der  $\Sigma_{(a_i)}$  bildet eine affine Stratifikation von  $G(k, n)$ , also eine Basis von  $A(G(k, n))$ . Die Berechnung von  $\sigma_{(a_i)} \cdot \sigma_{(b_i)}$  bildet den Inhalt des *Schubert-Kalküls*.

Er beruht auf drei Grundformeln: Der Beziehung für  $|(a_i)| + |(b_i)| = k(n-k)$

$$(83) \quad \sigma_{(a_i)} \cdot \sigma_{(b_i)} = \begin{cases} 1 & \text{für } a_i + b_{k+1-i} = n-k \text{ für alle } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nennen  $(b_i)$  zu  $(a_i)$  *komplementär*, wenn  $a_i + b_{k+1-i} = n-k$  ist.

Der *Formel von Pieri*

$$(84) \quad \sigma_a \cdot \sigma_{(b_i)} = \sum_{\substack{|c|=|b|+a \\ b_i \leq c_i \leq b_{i-1}}} \sigma_{(c_i)}$$

Der *Formel von Giambelli*

$$(85) \quad \sigma_{(a_i)} = \det(\sigma_{a_i-i+j})_{1 \leq i \leq k}^{1 \leq j \leq k} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{a_1} & \sigma_{a_1+1} & \sigma_{a_1+2} & \dots & \sigma_{a_1+k-1} \\ \sigma_{a_2-1} & \sigma_{a_2} & \sigma_{a_2+1} & \dots & \sigma_{a_2+k-2} \\ \sigma_{a_3-2} & \sigma_{a_3-1} & \sigma_{a_3} & \dots & \sigma_{a_3+k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{a_k-k+1} & \sigma_{a_k-k+2} & \sigma_{a_k-k+3} & \dots & \sigma_{a_k} \end{pmatrix}$$

Diese Formel kann aus der von Pieri durch Entwicklung der Determinante erhalten werden. (Es sei  $\sigma_a = 0$  für  $a < 0$ ).

Im Detail:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots] &= [a_1][a_2, a_3, a_4, \dots] \\ &\quad - [a_2-1][a_1+1, a_3, a_4, \dots] \\ &\quad + [a_3-2][a_1+1, a_2+1, a_4, \dots] \\ &\quad - [a_4-3][a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_5, \dots] + \dots \end{aligned}$$

durch Entwicklung der Giambelli-Matrix nach der ersten Spalte.

Durch eine kombinatorische Überlegung ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$[a_1][a_2, a_3, a_4, \dots] = [a_1, a_2, a_3, \dots] + [a_2-1][a_1+1, a_3, a_4, \dots]_{2; a_2}$$

sowie

$$\begin{aligned} [a_2-1][a_1+1, a_3, a_4, \dots] &= [a_2-1][a_1+1, a_3, a_4, \dots]_{2; a_2} + \\ &\quad + [a_3-2][a_1+1, a_2+1, a_4, \dots]_{3; a_3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [a_3-2][a_1+1, a_2+1, a_4, \dots] &= [a_3-2][a_1+1, a_2+1, a_4, \dots]_{3; a_3} + \\ &\quad + [a_4-3][a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_5, \dots]_{4; a_4} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} [a_4-3][a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_5, \dots] &= \\ &\quad [a_4-3][a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_5, \dots]_{4; a_4} + \\ &\quad + [a_5-4][a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_4+1, a_6, \dots]_{5; a_5} \end{aligned}$$

und so weiter bis zum Ende der Determinantenentwicklung.

Dabei stehe  $[a][b_1, b_2, b_3, \dots]_{i; a_i}$  für die Verteilungen von  $a$  über  $[b_1, b_2, b_3, \dots]$  für die  $b_i$  maximal bis  $a_i$  (einschließlich) aufgefüllt wird.