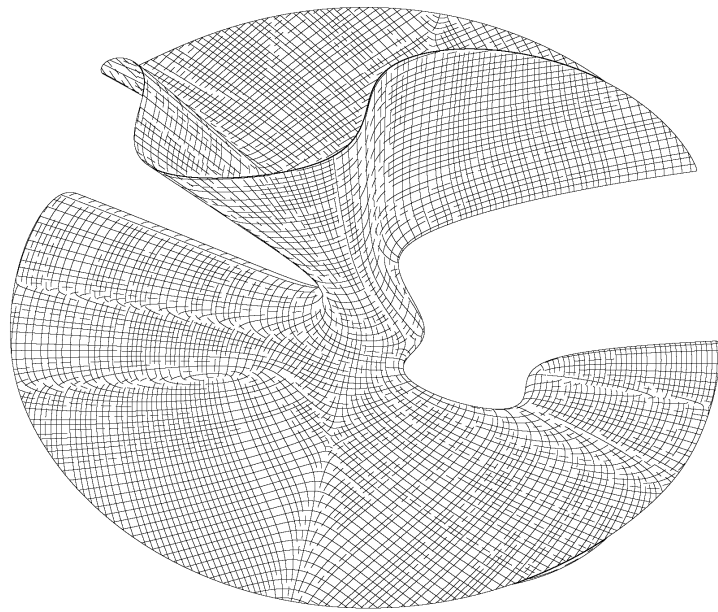


Jürgen Böhm

Schnitttheorie

1. April 2018

Für R G



Vorwort

Dieses Buch ist eine Einführung in die Schnitttheorie der algebraischen Geometrie.

Das Buch orientiert sich an Fultons „Intersection Theory“ [1].

Der Autor freut sich über Rückmeldungen an

`mathematik@aviduratas.de`

mit allgemeinen Kommentaren zu dem Buch, besonders aber mit Meldungen über gefundene Fehler und problematische Stellen.

Wilhermsdorf, 2015 -

Jürgen Böhm

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Vorbereitung	1
1.1.1	Länge und artinsche Moduln	1
1.1.2	Herbrandquotienten	2
1.2	Algebraische Zykel	4
1.2.1	Verschwindungsordnungen	4
1.2.2	Algebraische Zykel	5
1.2.3	Eigentlicher push-forward	6
1.2.4	Algebraische Zykel von Schemata und Unterschemata ..	11
1.2.5	Flacher pull-back	12
1.2.6	Eine exakte Sequenz	15
1.2.7	Affine Bündel	18
2	Divisoren	19
2.1	Weildivisoren und Cartierdivisoren	19
2.1.1	Pseudodivisoren	22
2.1.2	Schnitte mit Divisoren	24
2.2	Kommutativität der Schnittklassen	28
2.3	Chern-Klasse eines Linienbündels	28
2.4	Gysin-Abbildung für Divisoren	28
3	Chern-Klassen von Vektorbündeln	29
3.1	Segre-Klassen	29
3.2	Chern-Klassen	31
4	Deformation in den Normalkegel	33
4.1	Die Gerstenhaber-Algebra	33
4.1.1	Definition	33
4.1.2	Die Faser von $\mathrm{Bl}_{(I,T)} A[T]$ über $V(T)$	34
4.1.3	Die Faser von $\mathrm{Bl}_{(I,T)} A[T]$ über $V((I,T))$	36
4.1.4	Ein Lemma über die Gerstenhaber-Algebra	37

X	Inhaltsverzeichnis	
	4.2 Der globale Fall	38
	4.2.1 Bildung von Schnitten	39
	4.2.2 Schnitte im allgemeinsten Fall	40
	5 Schnitte	41
	Literaturverzeichnis	43
	Sachverzeichnis	45

Einführung

1.1 Vorbereitung

1.1.1 Länge und artinsche Moduln

Definition 1.1.1. *Es sei M ein artinscher A -Modul mit maximaler unverfeinerbarer Kette $M_0 \subset \cdots \subset M_n$ von A -Untermuln.*

Dann nennt man $\text{len}_A M = n$ die Länge von M

Proposition 1.1.1. *Es sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine exakte Folge von artinschen Moduln. Dann gilt*

$$\text{len}_A M = \text{len}_A M' + \text{len}_A M''.$$

Ist

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_r \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz artinscher Moduln, so ist

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \text{len}_A M_i = 0$$

Proposition 1.1.2. *Es seien (B, \mathfrak{q}) und (A, \mathfrak{p}) zwei lokale Artinringe und B eine flache A -Algebra. Dann ist*

$$\text{len } B = (\text{len } A) \text{len}(B/\mathfrak{p}B) \tag{1.1}$$

Beweis. Man wähle eine Filtrierung

$$A = M_r \supseteq M_{r-1} \supseteq M_{r-2} \supseteq \cdots \supseteq M_0 = (0)$$

von A -Moduln M_i mit

$$0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow 0,$$

so daß $r = \text{len } A$.

Es ist $A^{n_i} \rightarrow M_i \rightarrow 0$ exakt und damit auch $B^{n_i} \rightarrow B \otimes_A M_i \rightarrow 0$ exakt und somit $\text{len}_B M_i < \infty$. Da B/A flach, gilt

$$0 \rightarrow M_{i-1} \otimes_A B \rightarrow M_i \otimes_A B \rightarrow B/\mathfrak{p}B \rightarrow 0$$

mit artinschen Moduln an jeder Stelle. Bildet man von allen diesen Sequenzen die Beziehungen

$$\text{len}(M_i \otimes_A B) = \text{len}(M_{i-1} \otimes_A B) + \text{len}(B/\mathfrak{p}B)$$

und addiert, so entsteht wegen $r = \text{len } A$ und $M_r \otimes_A B = A \otimes_A B = B$ die behauptete Beziehung.

1.1.2 Herbrandquotienten

Das folgende Material ist aus Fulton [1] entnommen.

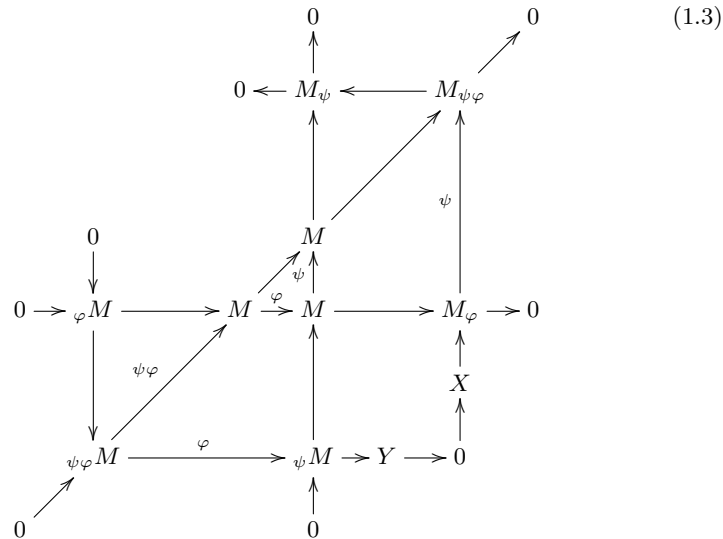
Es sei M ein A -Modul, $\varphi : M \rightarrow M$ ein A -Endomorphismus und es bezeichne ${}_{\varphi}M = \ker \varphi$ sowie $M_{\varphi} = M/\text{im } \varphi = \text{coker } \varphi$.

Definition 1.1.2. *Ist mit obigen Bezeichnungen $\text{len}_A {}_{\varphi}M < \infty$ und $\text{len}_A M_{\varphi} < \infty$, so ist*

$$e_A(\varphi; M) = e(\varphi; M) = \text{len}_A M_{\varphi} - \text{len}_A {}_{\varphi}M \tag{1.2}$$

der Herbrandquotient von M bezüglich φ .

Das untenstehende Diagramm wird im Beweis des nachfolgenden Satzes benötigt. In ihm ist M ein A -Modul und $\varphi, \psi : M \rightarrow M$ zwei A -Endomorphismen von M .



Proposition 1.1.3. *Es sei M ein A -Modul wie oben und φ, ψ zwei Endomorphismen von M . Dann sind alle drei Herbrandquotienten $e(\varphi; M)$, $e(\psi; M)$, $e(\psi\varphi; M)$ definiert, wenn zwei von ihnen es sind.*

Es gilt dann auch

$$e(\psi\varphi; M) = e(\psi; M) + e(\varphi; M). \tag{1.4}$$

Beweis. Betrachte das obige Diagramm (1.3). In ihm läßt sich eine Abbildung von Y nach X konstruieren, indem man zu einem $y \in Y$ das Urbild in ${}_{\psi}M$ aufsucht, und es nach M und dann nach M_{φ} verschiebt.

Das so verschobene Element liegt dann sogar schon in X . Eine übliche Diagrammjagd ergibt unter Zugrundelegung dieser Definition für die Abbildung $X \rightarrow Y$ einen Isomorphismus $X \cong Y$.

Mit den beiden exakten Sequenzen aus dem Diagramm

$$0 \rightarrow {}_{\varphi}M \rightarrow {}_{\psi\varphi}M \rightarrow {}_{\psi}M \rightarrow Y \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow X \rightarrow M_{\varphi} \rightarrow M_{\psi\varphi} \rightarrow M_{\psi} \rightarrow 0$$

folgt die Behauptung des Satzes aus Proposition 1.1.1.

Lemma 1.1.1. *Es sei M ein endlich erzeugter freier A -Modul und $\phi : M \rightarrow M$ ein A -linearer Endomorphismus. Dann ist $e_A(\phi, M)$ genau dann definiert, wenn $e_A(\det(\phi), A)$ definiert ist und es gilt*

$$e_A(\phi, M) = e_A(\det(\phi), M) \tag{1.5}$$

Lemma 1.1.2. *Es sei A ein eindimensionaler lokaler Ring mit minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$. Weiter sei M ein endlich erzeugter A -Modul und $a \in A$ mit $a \notin \mathfrak{p}_j$ für alle j . Dann gilt*

$$\begin{aligned} e_A(a, M) &= \sum_{i=1}^t \text{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^t \text{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot \text{len}_A(A/(\mathfrak{p}_i, aA)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Beweis. Filtriere M mit $0 = N_0 \subseteq \dots \subseteq N_r = M$ und

$$0 \rightarrow N_{\nu-1} \rightarrow N_{\nu} \rightarrow A/\mathfrak{p}_{\nu} \rightarrow 0$$

mit $\mathfrak{p}_{\nu} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{q}\}$.

Der Ausdruck $e_A(a, N)$ ist für jeden endlich erzeugten A -Modul N wohldefiniert, denn a annulliert K und K' in

$$0 \rightarrow K \rightarrow N \xrightarrow{a} N \rightarrow K' \rightarrow 0,$$

so daß nur \mathfrak{q} als assoziiertes Ideal auftreten kann, und damit K und K' von endlicher Länge sind. Also ist $e_A(a, N_{\nu})$ und $e_A(a, A/\mathfrak{p}_{\nu})$ wohldefiniert.

Es ist dann wegen

$$e_A(a, N_\nu) = e_A(a, N_{\nu-1}) + e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu)$$

auch

$$e_A(a, M) = \sum_{\nu=1}^r e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu)$$

Ist $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{q}$, so ist $e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu) = 0$. Wir brauchen also nur die Terme mit $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_{i(\nu)}$ betrachten.

Der Faktor A/\mathfrak{p}_i tritt genau $\text{len}(M_{\mathfrak{p}_i})$ -mal in der Filtrierung auf, wie man, wie üblich, durch Lokalisieren $-\otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$ der Filtrierung erkennt.

Es ist also

$$e_A(a, M) = \sum_{i=1}^t \text{len}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i)$$

und damit der Beweis erbracht.

1.2 Algebraische Zykel

1.2.1 Verschwindungsordnungen

Es sei A ein eindimensionaler Integritätsring mit Quotientenkörper K .

Dann existiert eine Abbildung

$$\text{ord}_A : K^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \text{ord}(f) \quad (1.7)$$

Diese ist folgendermaßen definiert:

Es sei $f = a/s$, mit $a, s \in A - \{0\}$, ein beliebiges Element von K^* . Definiere für $a \in A$ die Abbildung $\phi_a : A \rightarrow A$ mit $\phi_a(x) = ax$ und setze

$$\text{ord}_A(a) = e_A(\phi_a; A) = \text{len}_A(A/aA) \quad (1.8)$$

Diese Abbildung erfüllt für $a, a' \in A$ die Beziehung

$$\text{ord}_A(aa') = \text{ord}_A(a) + \text{ord}_A(a') \quad (1.9)$$

denn es ist ja $\phi_{aa'} = \phi_a \circ \phi_{a'}$. Weiterhin setze

$$\text{ord}_A(f) = \text{ord}_A(a/s) = \text{ord}_A(a) - \text{ord}_A(s) \quad (1.10)$$

Ist $f = a/s = a'/s'$, so ist $as' = a's$, also auch $\text{ord}_A(a) + \text{ord}_A(s') = \text{ord}_A(a') + \text{ord}_A(s)$. Damit ist auch $\text{ord}_A(a/s) = \text{ord}_A(a'/s')$, also ord_A auf K^* wohldefiniert.

Außerdem gilt:

Proposition 1.2.1. *Für $f, g \in K^*$ ist $\text{ord}_A(fg) = \text{ord}_A(f) + \text{ord}_A(g)$ und $\text{ord}_A(f^{-1}) = -\text{ord}_A(f)$.*

Es sei nun X ein integres Schema und $x \in X$ ein Punkt der Höhe 1. Dann ist $A = \mathcal{O}_{X,x}$ ein eindimensionaler Integritätsring und es existiert damit auch die Abbildung ord_A , die wir auch mit v_x bezeichnen werden:

$$v_{\mathcal{O}_{X,x}} = v_x = \text{ord} : K(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f \mapsto v_x(f) \tag{1.11}$$

Lemma 1.2.1. *Es sei A ein eindimensionaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(A)$. Weiter sei $\phi : M \rightarrow M$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten A -Moduls M und $\phi_K : M \otimes_A K \rightarrow M \otimes_A K$ der induzierte Endomorphismus. Wenn dann $\det(\phi_K) \neq 0$ ist, so gilt*

$$e_A(\phi, M) = \text{ord}_A(\det(\phi_K)) \tag{1.12}$$

1.2.2 Algebraische Zykel

Es sei X ein algebraisches Schema über dem Grundkörper K . Weiter sei

$$\begin{aligned} Z_k(X) &= \bigoplus_{\substack{V \subseteq X \\ \dim V = k \\ V \text{ integer}}} \mathbb{Z} = \\ &= \left\{ \sum_i m_i [V_i] \mid m_i \in \mathbb{Z}, V_i \text{ Untervarietät von } X \text{ mit } \dim V_i = k \right\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Definition 1.2.1. *Die Gruppe $Z_k(X)$ ist die Gruppe der k -Zykel von X . Es sei $Z_*(X) = \bigoplus_k Z_k(X)$.*

Definition 1.2.2. *Ist X eine Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ dann ist*

$$\text{div}_X(f) = \text{div}(f) = \sum_{\substack{x \in X, \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} v_x(f) \{x\}^- \subseteq Z_{n-1}(X) \tag{1.14}$$

der Divisor von f auf X .

Proposition 1.2.2. *Für X Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ ist*

$$\text{div}(f^{-1}) = -\text{div}(f) \in Z_{n-1}(X). \tag{1.15}$$

Ist X ein algebraisches Schema und $W \subseteq X$ eine $(k+1)$ -dimensionale Untervarietät sowie $f \in K(W)^*$, so ist

$$\text{div}(f) = \sum v_{V_i}(f) [V_i] \tag{1.16}$$

eine formale Summe von k -dimensionalen Untervarietäten V_i von W und damit auch von X . Also ist $\text{div}(f) \subseteq Z_k(X)$.

Definition 1.2.3. Ein Zykel $\alpha \in Z_k(X)$ heißt rational äquivalent zu 0, geschrieben $\alpha \sim 0$, wenn ein System $W_1, \dots, W_r \subseteq X$ von Varietäten und rationalen Funktionen $f_i \in K(W_i)^*$ existiert, so daß

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \operatorname{div}(f_i) \quad (1.17)$$

ist. Wir schreiben

$$\operatorname{Rat}_k(X) = \{\alpha \in Z_k(X) \mid \alpha \sim 0\} \quad (1.18)$$

Proposition 1.2.3. Die Menge $\operatorname{Rat}_k(X)$ ist eine Untergruppe von $Z_k(X)$.

Beweis. Ist $\alpha, \beta \sim 0$ mit $\alpha = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i)$ und $\beta = \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j)$, so ist $-\alpha = \sum \operatorname{div}_{W_i}(f_i^{-1}) \sim 0$ und $\alpha + \beta = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i) + \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j) \sim 0$.

Definition 1.2.4. Die Quotientengruppe $Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X)$ ist $A_k(X)$, die Gruppe der k -Zykelklassen. Es sei $A_*(X) = \bigoplus_k A_k(X)$

Proposition 1.2.4. Es sei X ein Schema und X_{red} sein reduziertes abgeschlossenes Unterschema. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_{\text{red}})$ und $A_k(X) = A_k(X_{\text{red}})$.

Proposition 1.2.5. Es sei $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung von X in disjunkte Komponenten. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_1) \oplus \dots \oplus Z_k(X_r)$ und $A_k(X) = A_k(X_1) \oplus \dots \oplus A_k(X_r)$.

Proposition 1.2.6. Es seien $X_1, X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Unterschemata von einem Schema X . Dann ist die Sequenz

$$A_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow A_k(X_1) \oplus A_k(X_2) \rightarrow A_k(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

exakt.

Beweis. Man beachte, daß für jedes irreduzible $Z \subseteq X_1 \cup X_2$ immer $Z \subseteq X_1$ oder $Z \subseteq X_2$ ist.

1.2.3 Eigentlicher push-forward

Definition 1.2.5. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung algebraischer Schemata.

Dann definiert f eine Abbildung $Z_k(X) \rightarrow Z_k(Y)$ gemäß folgender Vorschrift

$$f_* V = \begin{cases} [k(V) : k(W)]W & \text{für } W = f(V) \text{ falls } \dim W = \dim V = k \\ 0 & \text{falls } \dim f(V) \neq \dim V \end{cases} \quad (1.20)$$

für jede irreduzible k -dimensionale Varietät $V \in Z_k(X)$ und entsprechender Erweiterung durch \mathbb{Z} -Linearität.

Proposition 1.2.7. *Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ eigentliche Abbildungen algebraischer Schemata. Dann ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Beweis. Es sei $V \in Z_k(X)$ eine irreduzible Varietät. Ist $\dim g(f(V)) \neq \dim V$, so ist $\dim f(V) \neq \dim V$ oder $\dim g(f(V)) \neq \dim f(V)$. In allen Fällen ist $(gf)_*(V) = 0$ und $g_*f_*V = 0$. Ist nun $\dim V = \dim f(V) = \dim g(f(V)) = k$, so ist

$$\begin{aligned} (gf)_*(V) &= [k(V) : k(gf(V))]gf(V) = \\ &= [k(V) : k(f(V))]([k(f(V)) : k(gf(V))]gf(V)) = \\ &= [k(V) : k(f(V))]g_*(f(V)) = g_*([k(V) : k(f(V))]f(V)) = g_*f_*(V) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Proposition 1.2.8. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung algebraische Schemata. Dann ist $f_*\text{Rat}_k(X) \subseteq \text{Rat}_k(Y)$. Also induziert f_* eine Abbildung $f_* : A_k(X) \rightarrow A_k(Y)$.*

Diese Behauptung folgt aus folgenden Tatsachen:

Proposition 1.2.9. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche, surjektive Abbildung von l -Varietäten. Weiter sei $\dim X = k+1$ und $\dim Y \leq k$, sowie $r \in K(X)^*$. Dann ist*

$$f_* \text{div}_X(r) = 0 \quad (1.22)$$

Lemma 1.2.2. *Es sei $f : X \rightarrow l$ eine eigentliche eindimensionale l -Varietät über einem Körper l . Weiter sei $r \in K(X)^*$ eine rationale Funktion auf X . Dann ist mit einer Summe über die abgeschlossenen Punkte $P \in X$:*

$$\text{div}_X(r) = \sum_{P \in X} v_P(r)P = \sum_{P \in X} n_P P \quad (1.23)$$

und es gilt

$$\sum_{P \in X} n_P [k(P) : l] = 0 \quad (1.24)$$

Lemma 1.2.3. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung von l -Varietäten und $\dim X = k+1$ sowie $\dim Y = k$.*

Weiter sei $j : Y' = \text{Spec}(K(Y)) \rightarrow Y$ die kanonische Abbildung des generischen Punktes, eine flache Abbildung. Man habe das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y' \end{array} \quad (1.25)$$

Es ist dann X' eine eindimensionale, eigentliche $K(Y)$ -Varietät.

Weiterhin induzieren j und j' Abbildungen $j'^ : Z_k(X) \rightarrow Z_0(X')$ und $j^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_0(Y')$, für die gilt*

$$f'_* j'^* \alpha = j^* f_* \alpha \quad (1.26)$$

für einen Zykel $\alpha \in Z_k(X)$. Die Abbildung $j^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_0(Y')$ ist ein Isomorphismus.

Schließlich ist für ein $r \in K(X)^*$ und sein Bild $r' \in K(X')^*$ unter der kanonischen Abbildung $K(X) \rightarrow K(X')$:

$$j'^* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_{X'}(r') \quad (1.27)$$

Beweis. Lokal ist $Y = \operatorname{Spec}(A)$ und $X = \operatorname{Spec}(B)$ mit einer Injektion $f^\sharp : A \rightarrow B$. Die Abbildung $X' \rightarrow Y'$ wird dann durch die Lokalisierung dieses Morphismus mit $-\otimes_A Q(A)$ erzeugt. Man hat die ebenfalls injektive Abbildung $f'^\sharp : Q(A) \rightarrow B \otimes_A Q(A)$ und es ist $B \otimes_A Q(A)$ auch integer, also X' eine Varietät.

Nun zum Beweis von Proposition 1.2.9:

Beweis. Nur der Fall $\dim Y = k = \dim X - 1$ ist nicht trivial: Es sei $\alpha = \operatorname{div}_X(r) \in Z_k(X)$. Dann ist, mit dem cartesischen Quadrat aus dem vorigen Lemma und seinen Abbildungen $j^* f_*(\alpha) = f'_*(\operatorname{div}_{X'}(r')) = 0$ nach dem vorvorigen Lemma. Andererseits ist $j^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_0(Y')$ injektiv, also $f_*(\alpha) = 0$ wie behauptet.

Proposition 1.2.10. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche, surjektive Abbildung von l -Varietäten. Weiter sei $\dim X = \dim Y = k + 1$. Dann ist $L = K(X)$ eine endliche Erweiterung von $K = K(Y)$ und für $r \in K(X)^*$ gilt*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y \operatorname{Norm}_{[L:K]}(r) \quad (1.28)$$

Proposition 1.2.11. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche surjektive Abbildung algebraischer Varietäten. Weiter sei $\dim X = \dim Y = k + 1$ und $L = K(X)$ sowie $K = K(Y)$.*

Es gelte dann für jedes $y \in Y$ der Höhe 1 und die endliche Menge der $x_1, \dots, x_m \in X_y$ mit der Höhe 1 in X , daß

$$\sum_{i=1}^m v_{B_i}(r) [k(B_i) : k(A)] = v_A(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r)) \quad (1.29)$$

für jedes $r \in L$ und $B_i = \mathcal{O}_{X, x_i}$ sowie $A = \mathcal{O}_{Y, y}$

In diesem Fall ist $f_ \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$ für jedes $r \in L^*$.*

Lemma 1.2.4. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Schemaabbildung und $V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y, y})$ mit der kanonischen Abbildung $g : V \rightarrow Y$ für ein $y \in Y$. Weiter sei $X' = X \times_Y V$ und $p : X' \rightarrow X$ die kanonische Projektion.*

Dann induziert p einen Homöomorphismus $p : X' \rightarrow f^{-1}(g(V))$ und es ist für $x' \in X'$ und $x \in X$ mit $p(x') = x$ auch $\mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X', x'}$.

Ist X integer, so ist auch X' integer und es ist $K(X) = K(X') = L$. Für ein $r \in L^$ und x, x' wie oben mit $\dim \mathcal{O}_{X, x} = 1$ ist dann auch $v_x(r) = v_{x'}(r)$.*

Lemma 1.2.5. *Es sei $B \supseteq A$ eine endliche Erweiterung von Integritätsringen und $L = Q(B)$, sowie $K = Q(A)$. Weiter sei (A, \mathfrak{m}) ein eindimensionaler lokaler Ring und $B_i = B_{\mathfrak{q}_i}$ für die $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$ mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Dann ist für jedes $r \in L^*$ die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^m v_{B_i}(r)[k(B_i) : k(A)] = v_A(\text{Norm}_{[L:K]}(r)) \quad (1.30)$$

erfüllt.

Beweis. Man kann wegen $v(rr') = v(r) + v(r')$ und $\text{Norm}(rr') = \text{Norm}(r)\text{Norm}(r')$ stets annehmen, daß $r = b \in B - \{0\}$ ist. Setze $\phi_b : B \rightarrow B$ mit $\phi_b(x) = bx$. Dann ist

$$e_A(\phi_b; B) = v_A(\det(\phi_b)_K; B \otimes_A K) = v_A(\det(\phi_b)_K; L) = v_A(\text{Norm}_{[L:K]}(b)) \quad (1.31)$$

wegen Lemma 1.2.1
Andererseits ist

$$\begin{aligned} e_A(\phi_b; B) &= \text{len}_A(B/bB) = \sum_{i=1}^m \text{len}_A(B_i/bB_i) = \\ &= \sum_{i=1}^m \text{len}_{B_i}(B_i/bB_i)[k(B_i) : k(A)] = \sum_{i=1}^m v_{B_i}(b)[k(B_i) : k(A)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

Die zweite Gleichheit erkennt man aus einer B -Filtrierung $0 \rightarrow N_{\nu-1} \rightarrow N_{\nu} \rightarrow k(B_{i_{\nu}}) \rightarrow 0$ von B/bB und Lokalisierungen dieser Filtrierung an den \mathfrak{q}_i . (Man beachte, daß $\dim B = \dim A = 1$ und \mathfrak{q}_i maximal).

Proposition 1.2.12. *Es sei $f : \tilde{X} \rightarrow X$ die kanonische eigentliche Abbildung von der Normalisierung \tilde{X} einer Varietät X nach X . Dann ist f sogar eine endliche Abbildung. Für $K = k(\tilde{X}) = k(X)$ sowie $r \in K^*$ gilt dann*

$$\sum_{i=1}^m v_{x_i}(r)[k(x_i) : k(x)] = v_x(r) \quad (1.33)$$

wobei $x_1, \dots, x_m \in \tilde{X}$ die endlich vielen Urbilder eines $x \in X$ der Höhe 1 sind.

Proposition 1.2.13. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine dominante Abbildung von Varietäten. Weiter seien $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\tilde{Y} \rightarrow Y$ die Abbildungen der jeweiligen Normalisierungen. Dann existiert genau eine Abbildung $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, so daß*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \end{array} \quad (1.34)$$

kommutiert. Ist f eigentlich, so ist auch g eigentlich.

Beweis. Es seien $L = K(X)$ und $K = K(Y)$ und

$$\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{\phi} & K \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xleftarrow{\quad} & A \end{array}$$

ein Quadrat mit $V = \text{Spec}(A) \subseteq Y$ und $U = \text{Spec}(B) \subseteq X$ sowie $f(U) \subseteq V$. Weiter seien \tilde{B} und \tilde{A} die Normalisierungen in L und K . Ein $z \in \tilde{A} \subseteq K$ ist ganz über A . Also ist $\phi(z) \in L$ ganz über $\phi(A) \subseteq B$, das heißt $\phi(z) \in \tilde{B}$. Damit erweitert sich $\phi : A \rightarrow B$ zu einer Abbildung $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$. Indem diese Abbildungen miteinander verkleben, definieren sie die Abbildung $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

Ist f eigentlich, so auch $f \circ p = q \circ g$, da p endlich. Da q separiert, ist dann auch g eigentlich.

Proposition 1.2.14. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive, endliche, also auch eigentliche, Abbildung von Varietäten X und Y . Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$. Weiter sei $y \in Y$ ein Punkt der Höhe 1 und x_1, \dots, x_m seine endlich vielen Urbilder in X . Dann gilt für jedes $r \in L^*$, daß*

$$\sum_{i=1}^m v_{x_i}(r)[k(x_i) : k(y)] = v_y(\text{Norm}_{[L:K]}(r)) \quad (1.35)$$

ist.

Lemma 1.2.6. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Weiter sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$. Es sei $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ für einen Punkt $y \in Y$ der Höhe 1 und es sei $V = \text{Spec}(A)$. Weiter sei C der ganze Abschluß von A in L und $X_V = X \times_Y V$.*

Dann ist $\dim \text{Spec}(C) = 1$ und es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_V & \xrightarrow{g} & \text{Spec}(C) \\ \downarrow & \swarrow & \\ V & & \end{array} \quad (1.36)$$

in dem g ein Isomorphismus ist

Beweis. Die Abbildung von $X_V = f^{-1}(V) \rightarrow V$ ist als Basiserweiterung von f eigentlich und $f^{-1}(V)$ ist mit X zusammen auch normal. Ebenso ist V normal, also A diskreter Bewertungsring.

Da $\dim X = \dim Y$, ist L/K algebraisch. Da $C \otimes_A K$ der ganze Abschluß von K in L , also gleich L ist, ist umsomehr $Q(C) = L$.

Ist nun $U = \text{Spec}(B) \subseteq f^{-1}(V)$, so ist jedes $c \in C$ ganz über A , also auch ganz über B und weil B normal, auch Element von B . Also ist $C \subseteq B$. Die einzelnen Abbildungen $\text{Spec}(C \rightarrow B)$ für alle möglichen B verkleben zu einer Abbildung $g : X_V \rightarrow \text{Spec}(C)$.

Weiter erzeugt jedes Urbild $x_i \in X_V$ von y einen Schnitt $m_{x_i} \cap C = \mathfrak{q}_i \subseteq C$. Da C auch ganzabgeschlossen in $Q(C) = L$ ist, ist $C_{\mathfrak{q}_i} \subseteq \mathcal{O}_{X_V, x_i}$ eine lokale Inklusion von (diskreten) Bewertungsringen. Da Bewertungsringe maximal bezüglich Dominierung sind, ist sogar $C_{\mathfrak{q}_i} = \mathcal{O}_{X_V, x_i}$.

Da $X_V \rightarrow V$ und $\text{Spec}(C) \rightarrow V$ eigentlich sind, ist es auch g . Damit ist g eine abgeschlossene Abbildung mit Isomorphismen $C_{\mathfrak{p}_g(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_V, x}$. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß g bijektiv ist.

Betrachte für ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subseteq C$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(L) & \longrightarrow & X_V \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 \text{Spec}(C_{\mathfrak{p}}) & \xrightarrow{i} & \text{Spec}(C)
 \end{array} \tag{1.37}$$

welches das bewertungstheoretische Kriterium der Eigentlichkeit für die Abbildung g ausdrückt.

Die Fortsetzungen h von i entsprechen genau den Punkten $x \in X_V$ mit $g(x) = i(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})$. Da h immer existiert und eindeutig ist, ist also auch g bijektiv.

Proposition 1.2.15. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$ sowie $r \in L^*$. Weiter sei $y \in Y$ ein Punkt der Höhe 1 und x_1, \dots, x_m seine Urbilder in X . Dann ist*

$$\sum_{i=1}^m v_{\mathcal{O}_{X, x_i}}(r) [k(x_i) : k(y)] = v_y(\text{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{1.38}$$

erfüllt.

Beweis. Es sei wie im vorigen Lemma

$$\begin{array}{ccc}
 X_V & \xrightarrow{g} & \text{Spec}(C) \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 V & &
 \end{array} \tag{1.39}$$

mit einem Isomorphismus g .

Wir können also Gleichung (1.38) auch als

$$\sum_{i=1}^m v_{C_{q_i}}(r) [k_{C_{q_i}}(x_i) : k_A(y)] = v_y(\text{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{1.40}$$

schreiben. Als solche ist sie aber nach Lemma 1.2.5 richtig.

1.2.4 Algebraische Zykel von Schemata und Unterschemata

Definition 1.2.6. *Es sei X ein algebraisches Schema und $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ seine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist $[X] \in Z_*(X)$ definiert als*

$$[X] = \sum_{i=1}^r m_i [X_i] \tag{1.41}$$

wobei $m_i = \text{len } \mathcal{O}_{X, X_i}$ ist. Wir nennen m_i die geometrische Multiplizität von X_i in X . Gegebenenfalls schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter $Z_*(X) \rightarrow A_*(X)$.

Anmerkung 1.2.1. Ist $X \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, so schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter der Abbildung $Z_*(X) \rightarrow Z_*(Y)$. Ebenso stehe $[X]$ auch für das Bild von $[X]$ in $A_*(Y)$.

Anmerkung 1.2.2. Ist X rein k -dimensional, also $\dim X_i = k$ für alle i , so ist $[X] \in Z_k(X)$ und es ist $A_k(X) = Z_k(X) = \{\sum n_i [X_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$.

Anmerkung 1.2.3. Es sei $A = K[x_1, \dots, x_n]$ und $X = \text{Spec}(A/I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$. Weiter sei $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, also minimale Primideale über I . Dann ist $m_i = \text{len}(A/I)_{\mathfrak{p}_i}$.

1.2.5 Flacher pull-back

Eine flache Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei hier stets eine *flache Abbildung der Relativdimension n* , wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt.

Beispiele solcher Abbildungen sind:

1. Eine offene Einbettung $U \subseteq X$ (Relativdimension 0)
2. Die Projektion eines Vektorbündels $p : E \rightarrow X$ oder eine \mathbb{A}^n -Bündels oder eines projektiven Bündels $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$.
3. Die Projektion $p : Y \times_k Z \rightarrow Y$ für ein algebraisches Schema $Z \rightarrow k$ der reinen Dimension n .
4. Ein dominanter Morphismus $f : X \rightarrow C$ von einer n -dimensionalen Varietät auf eine nichtsinguläre Kurve C . (Relativdimension $n - 1$).

Definition 1.2.7. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension n . Weiter sei $V \subseteq Y$ eine Untervarietät. Dann sei*

$$f^*(V) = [f^{-1}(V)]. \quad (1.42)$$

Diese Festsetzung dehnt sich \mathbb{Z} -linear zu einer Abbildung

$$f^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_{k+n}(X) \quad (1.43)$$

aus.

Lemma 1.2.7. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Schemamorphismus. Dann ist für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$*

$$f^*([Z]) = [f^{-1}(Z)]. \quad (1.44)$$

Beweis. Es sei $[Z] = \sum_i m_i [Z_i]$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten mit Multiplizitäten $m_i = \text{len } \mathcal{O}_{Z, Z_i}$. Weiter sei $f^{-1}(Z_i) = \bigcup_j Z'_{ij}$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten $Z'_{ij} \subseteq X$. Wähle nun eine offene Umgebung $V = \text{Spec}(A)$ des generischen Punktes η_i von Z_i und eine offene Umgebung $U = \text{Spec}(B)$ des generischen Punktes ξ_{ij} von Z'_{ij} mit $f(U) \subseteq V$.

Dann wird Z in A durch ein Ideal $I \subseteq A$ repräsentiert und $Z_i \cap V$ ist durch ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$, minimal, gegeben. Weiter wird Z'_{ij} und ξ_{ij} durch

ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq B$ gegeben mit $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}B$ minimal. Also ist $\mathfrak{q} \cap A \supseteq \mathfrak{p}$, und aus der going-down-Eigenschaft für B/A folgt dann auch $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Nun ist

$$f^*([Z]) = \sum m_i f^*([Z_i]) = \sum m_i [f^{-1}(Z_i)] = \sum_i m_i \sum_j n_{ij} [Z'_{ij}] \quad (1.45)$$

mit $n_{ij} = \text{len } \mathcal{O}_{f^{-1}(Z_i), Z'_{ij}}$. Es ist mit A und B geschrieben

$$m_i = \text{len}(A/I)_{\mathfrak{p}}$$

und

$$n_{ij} = \text{len}(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}}$$

Andererseits ist $[f^{-1}(Z)] = \sum n'_l [Z_l]$ mit $n'_l = \text{len } \mathcal{O}_{f^{-1}(Z), Z_l}$. Mit den Ringen A und B ausgedrückt, ist Z_l ein $\mathfrak{q} \subseteq B$, prim, mit $\mathfrak{q} \supseteq IB$ minimal. Es ist dann $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p} \supseteq I$ und \mathfrak{p} ist minimal über I , wieder aufgrund der Going-Down-Eigenschaft von B/A . Die Z_l sind also genau die Z'_{ij} . Wir nennen das zu $Z'_{ij} = Z_l$ gehörige Primideal wieder \mathfrak{q} . Man hat

$$n'_l = \text{len}(B/IB)_{\mathfrak{q}}$$

Wir müssen zeigen, daß

$$n'_l = m_i n_{ij}$$

ist.

Nenne nun $A' = A/I$ und $B' = B/IB$ und bemerke, daß auch $A' \rightarrow B'$ als Basiserweiterung von $A \rightarrow B$ mit A/I flach ist. Des weiteren sind $A'' = A'_{\mathfrak{p}} = (A/I)_{\mathfrak{p}}$ und $B'' = B'_{\mathfrak{q}} = (B/IB)_{\mathfrak{q}}$ lokale Artinringe und es ist $A'' \rightarrow B''$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Artinringe. Die zu zeigende Beziehung, ausgedrückt durch A'' und B'' , heißt:

$$(\text{len } A'') \text{len}(B''/\mathfrak{p}B'') = \text{len } B'' \quad (1.46)$$

Dies ist aber die Aussage von Proposition 1.1.2.

Korollar 1.2.1. *Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ flache Morphismen mit Relativedimension. Dann ist auch $g \circ f$ ein solcher, und es gilt*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad (1.47)$$

Proposition 1.2.16. *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (1.48)$$

ein cartesisches Quadrat mit g flach und f eigentlich. Dann ist g' flach und f' eigentlich und es gilt

$$f'_* g'^* \alpha = g^* f_* \alpha \quad (1.49)$$

in $Z_ Y'$ für alle $\alpha \in Z_* X$.*

Beweis.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W' & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \\
 & \tilde{Y}' & & & W \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 Y' & & & & \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & Y & &
 \end{array} \tag{1.50}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 V' & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & V \\
 \downarrow & \searrow & & \swarrow & \downarrow \\
 & X' & \xrightarrow{\quad} & X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & Y' & \xrightarrow{\quad} & Y & \\
 \downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
 W' & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & W
 \end{array} \tag{1.51}$$

Theorem 1.2.1. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Morphismus der relativen Dimension n . Weiter sei $\alpha \in Z_k Y$ mit $\alpha \sim 0$, also rational äquivalent zu Null. Dann ist $f^* \alpha \sim 0$ in $Z_{k+n} X$.*

Korollar 1.2.2. *Die Abbildung $f^* : Z_* Y \rightarrow Z_* X$ induziert eine Abbildung $f^* : A_* Y \rightarrow A_* X$.*

Lemma 1.2.8. *Es sei X ein rein n -dimensionales Schema mit irreduziblen Komponenten X_1, \dots, X_r und geometrischen Multiplizitäten m_1, \dots, m_r . Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf X , also ein Unterschema, das lokal auf $U \subseteq X$, affin, offen, durch einen Nichtnullteiler $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben ist.*

Es sei $D_i = D \cap X_i$ die Restriktion von D auf X_i . Dann gilt

$$[D] = \sum_{i=1}^r m_i [D_i] \tag{1.52}$$

in $Z_{n-1}(X)$.

Beweis. Wir betrachten X lokal als $X = \text{Spec}(A)$ und D als $f \in A$, kein Nullteiler. Weiter seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von A . Dann ist

$$[D] = [A/fA] = \sum_{\substack{\mathfrak{q}_i \supseteq fA \\ \text{minimal}}} [A/\mathfrak{q}_i] \text{len}(A/fA)_{\mathfrak{q}_i} \tag{1.53}$$

Weiter ist $[X] = \sum m_j [X_j]$ mit $m_j = \text{len } A_{\mathfrak{p}_j}$ und es ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} m_j \cdot [D_j] &= \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} \text{len } A_{\mathfrak{p}_j} \cdot [D_j] = \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} \text{len } A_{\mathfrak{p}_j} \cdot [A/fA \otimes_A A/\mathfrak{p}_j] = \\
 &= \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A \\ \text{minimal}}} [A/(f, \mathfrak{p}_j)] \cdot \text{len } A_{\mathfrak{p}_j} = \\
 &= \sum_{\substack{f, \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{q}_{ij} \\ \mathfrak{p}_j \text{ minimal}}} [A/\mathfrak{q}_{ij}] \text{len}(A/(f, \mathfrak{p}_j))_{\mathfrak{q}_{ij}} \cdot \text{len}(A_{\mathfrak{p}_j}) \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $[A/\mathfrak{q}_i]$ und $[A/\mathfrak{q}_{ij}]$, so muß also für ein festes $\mathfrak{q} \supseteq (f)$, minimal, die Bedingung

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{q} \\ \text{minimal}}} \text{len}(A/(f, \mathfrak{p}_j))_{\mathfrak{q}} \cdot \text{len } A_{\mathfrak{p}_j} = \text{len}(A/fA)_{\mathfrak{q}} \quad (1.55)$$

erfüllt sein. Dies folgt aber aus Lemma 1.1.2 für den eindimensionalen lokalen Ring $A_{\mathfrak{q}}$, $M = A_{\mathfrak{q}}$, das Element $a = f$ und die minimalen Primideale von $A_{\mathfrak{q}}$ die sich unter den $\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{q}}, \dots, \mathfrak{p}_r A_{\mathfrak{q}}$ finden lassen.

1.2.6 Eine exakte Sequenz

Proposition 1.2.17. *Es sei $i : Y \rightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Unterschemas Y von X . Weiter sei $U = X - Y$ und $j : U \rightarrow X$ die entsprechende Inklusion.*

Dann ist die Sequenz

$$A_k Y \xrightarrow{i_*} A_k X \xrightarrow{j^*} A_k U \rightarrow 0 \quad (1.56)$$

exakt für alle k .

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & (1.57) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & & A_k Y & \xrightarrow{i_*} & A_k X & \xrightarrow{j^*} & A_k U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & & Z_k Y & \xrightarrow{i_*} & Z_k X & \xrightarrow{j^*} & Z_k U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & & \text{Rat}_k Y & \xrightarrow{\phi} & \text{Rat}_k X & \xrightarrow{\psi} & \text{Rat}_k U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

wo in der untersten Sequenz die Beziehung $\psi \circ \phi = 0$ offensichtlich gilt.

Die mittlere horizontale Sequenz ist exakt, die Mittelexaktheit ist dabei unmittelbar klar. Weiter wird das Urbild einer Varietät $V \in Z_k U$ durch $\bar{V} \in Z_k X$ gegeben, eine offensichtlich surjektive Abbildung. Damit ist auch $j^* : A_k X \rightarrow A_k U$ surjektiv.

Die Beziehung im $i_* = \ker j^*$ in $A_k X$ folgt aus der Surjektivität von ψ durch eine einfache Diagrammjagd.

Die Surjektivität von ψ ergibt sich aus folgender Überlegung: Es sei (W, f) mit $W \in Z_{k+1}U$, irreduzibel, und $f \in K(W)$ gegeben, mit $\alpha = \operatorname{div}_W(f) \in \operatorname{Rat}_k U$. Dann ist ein Urbild $\beta \in \operatorname{Rat}_k X$ von α unter ψ erzeugt von (\bar{W}, f) , was wegen $K(\bar{W}) = K(W)$ wohldefiniert ist. Es ist also $\beta = \operatorname{div}_{\bar{W}}(f)$.

Proposition 1.2.18. *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (1.58)$$

ein cartesisches Quadrat von Schemata, wo i eine abgeschlossene Immersion und p eigentlich ist. Weiter induziere p einen Isomorphismus $p' : X' - Y' \rightarrow X - Y$.

Dann ist die Sequenz

$$A_k Y' \xrightarrow{a} A_k Y \oplus A_k X' \xrightarrow{b} A_k X \rightarrow 0 \quad (1.59)$$

mit $a(\alpha) = (q_*(\alpha), -i'_*(\alpha))$ und $b(\alpha_1, \alpha_2) = i_*\alpha_1 + p_*\alpha_2$ exakt.

Beweis. Betrachte für alles folgende das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A_k Y' & \xrightarrow{i'_*} & A_k X' & \xrightarrow{j'^*} & A_k U' & \longrightarrow & 0 \\ q_* \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p'_* & & \\ A_k Y & \xrightarrow{i_*} & A_k X & \xrightarrow{j^*} & A_k U & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.60)$$

mit dem Isomorphismus $p' : U' = X' - Y' \rightarrow X - Y = U$ und den Inklusionen $j : U \rightarrow X$ und $j' : U' \rightarrow X'$.

Zunächst ist $b \circ a = 0$, denn es ist

$$b(a(\alpha)) = b(q_*\alpha, -i'_*\alpha) = i_*q_*\alpha - p_*i'_*\alpha = 0$$

wegen $i_*q_* = p_*i'_*$

Weiterhin ist b surjektiv: Es sei $\alpha \in A_k X$ und $\beta' \in A_k U'$ mit $p'_*\beta' = j^*\alpha$, sowie $\beta'' \in A_k X'$ mit $j'^*\beta'' = \beta'$. Dann ist $j^*(\alpha - p_*\beta'') = j^*(\alpha) - p'_*j'^*(\beta'') = 0$. Also ist $\alpha - p_*\beta'' = i_*\alpha'$, also $\alpha = b(\alpha', \beta'')$.

Um nachzuweisen, daß auch $\ker b = \operatorname{im} a$, beginnen wir mit $b(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, also $i_*\alpha_1 + p_*\alpha_2 = 0$. Es ist dann auch $j^*p_*\alpha_2 = -j^*i_*\alpha_1 = 0$ und damit $p'_*j'^*\alpha_2 = 0$, also $j'^*\alpha_2 = 0$ und damit $\alpha_2 = i'_*\beta$ mit $\beta \in A_k Y'$. Es folgt dann

$$i_*(\alpha_1 + q_*\beta) = -p_*\alpha_2 + i_*q_*\beta = -p_*\alpha_2 + p_*i'_*\beta = -p_*\alpha_2 + p_*\alpha_2 = 0$$

Wir werden gleich die Identität $\ker i_* = q_*(\ker i'_*)$ zeigen. Aus ihr folgt jedenfalls

$$\alpha_1 + q_*\beta = q_*\beta'$$

mit einem $\beta' \in A_k Y'$ und $i'_* \beta' = 0$. Damit ist

$$q_*(\beta' - \beta) = \alpha_1$$

und

$$-i'_*(\beta' - \beta) = i'_* \beta = \alpha_2,$$

also $a(\beta' - \beta) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Es bleibt noch die Identität $\ker i_* = q_* \ker i'_*$. Die Inklusion $q_* \ker i'_* \subseteq \ker i_*$ ist klar. Sei also $\alpha \in A_k Y$ mit $i_* \alpha = 0$. Wir ziehen jetzt auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_k Y' & \xrightarrow{i'_*} & Z_k X' & \xrightarrow{j'^*} & Z_k U' \longrightarrow 0 \\ & & q_* \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p'_* \\ 0 & \longrightarrow & Z_k Y & \xrightarrow{i_*} & Z_k X & \xrightarrow{j^*} & Z_k U \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.61)$$

heran.

Ist $\alpha = [\alpha_0]$ mit $\alpha_0 \in Z_k Y$ und $[\alpha_0]$ der zugehörigen Klasse in $A_k Y$, so ist

$$i_* \alpha_0 = \beta_0 \in \text{Rat}_k X.$$

Wir schreiben

$$\beta_0 = \sum_i (W_i) + \sum_j (W'_j).$$

Dabei stehe W_i, W'_j für Elemente von $Z_{k+1} X$ mit rationalen Funktionen $f_i \in K(W_i)$ und $f'_j \in K(W'_j)$. Es sei dann $(W_i) = \text{div}_{W_i}(f_i) \in Z_k X$ und $(W'_j) = \text{div}_{W'_j}(f'_j) \in Z_k X$. Die W_i, W'_j seien so gewählt, daß $W_i \cap U = \emptyset$ und $W'_j \cap U \neq \emptyset$ ist.

Wählen wir nun $W''_j = \overline{p'^{-1}(W'_j \cap U)}$, so induziert die Abbildung p eine eigentliche Surjektion $p : W''_j \rightarrow W'_j$, die zugleich ein birationaler Isomorphismus ist. Ordnet man jedem f'_j das entsprechende $f''_j \in K(W''_j)$ zu, so ist wegen $K(W''_j) = K(W'_j)$ und $\text{Norm}_{K(W''_j)|K(W'_j)} = \text{id}$ auch

$$p_*(W''_j) = p_* \text{div}_{W''_j}(f''_j) = \text{div}_{W'_j} \text{Norm}_{K(W''_j)|K(W'_j)}(f''_j) = \text{div}_{W'_j}(f'_j) = (W'_j)$$

Es ist $j^*(\sum_j (W'_j)) = 0$ (wegen $j^* \beta_0 = 0$), also auch

$$p'_* j'^* \sum_j (W''_j) = j^* \sum_j p_*(W''_j) = j^* (\sum_j (W'_j)) = 0,$$

also

$$j'^* (\sum_j (W''_j)) = 0$$

also $i'_*(\gamma_0) = \sum (W''_j)$ für ein $\gamma_0 \in Z_k Y'$.

Weiterhin ist $j^*(\sum_i (W_i)) = 0$, also $\sum_i (W_i) = i_* \alpha'_0$ für ein $\alpha'_0 \in Z_k Y$, das sogar in $\text{Rat}_k Y$ liegt, was durch die Definition der $W_i \subseteq Y$ bewiesen wird. Ersetzen wir α_0 durch $\alpha_0 - \alpha'_0$, so können wir die W_i als nicht existent annehmen, ohne die Klasse $[\alpha_0] = [\alpha_0 - \alpha'_0]$ zu verändern.

Es ist nun

$$i_*(q_*(\gamma_0)) = p_* i'_*(\gamma_0) = p_* \sum_j (W''_j) = \sum_j (W'_j) = i_* \alpha_0$$

also wegen $i_* : Z_k Y \rightarrow Z_k X$ injektiv auch $q_* \gamma_0 = \alpha_0$.

Das Element $\gamma = [\gamma_0]$ hat nun die gewünschte Eigenschaft $q_* \gamma = \alpha$ und $i'_* \gamma = 0$ zu ergeben.

1.2.7 Affine Bündel

Ein Schema E zusammen mit einem Morphismus $p : E \rightarrow X$ heißt *affines Bündel (vom Rang n)*, wenn es eine offene Überdeckung (U_α) von X mit offenen Mengen gibt, so daß die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{g_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{A}^n \\ p \downarrow & \swarrow & \\ U_\alpha & & \end{array} \quad (1.62)$$

kommutieren und alle g_α Isomorphismen sind.

Proposition 1.2.19. *Es sei $p : E \rightarrow X$ ein affines Bündel vom Rang n und X ein noethersches Schema. Dann ist der flache pull-back*

$$p^* : A_k X \rightarrow A_{k+n} E \quad (1.63)$$

surjektiv für alle k .

Beweis Betrachte zunächst für $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $U = X - Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A_{k+n} E|_Y & \longrightarrow & A_{k+n} E & \longrightarrow & A_{k+n} E|_U & \longrightarrow & 0 \\ p|_Y^* \uparrow & & p^* \uparrow & & p|_U^* \uparrow & & \\ A_k Y & \longrightarrow & A_k X & \longrightarrow & A_k U & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.64)$$

Wenn $p|_Y^*$ und $p|_U^*$ surjektiv sind, ist es auch p^* . Damit kann man, mittels noetherscher Induktion, X immer weiter in Y und U aufspalten, und so letztlich $X = \text{Spec}(A)$, affines Schema, und $E = \mathbb{A}_X^n$, triviales Bündel, annehmen.

Indem man nun die Beziehung $\mathbb{A}_X^n = \mathbb{A}_{\mathbb{A}_X^{n-1}}^1$ ausnutzt, kann man sich sogar auf $E = \mathbb{A}_X^1 = \text{Spec}(A[t])$ beschränken.

Es sei nun $V \in Z_{k+1} X[t]$. Dann liegt V in der Faser $X[t]_W$ für ein $W \in Z_* X$. Ist dieses $W = \mathfrak{p} \in Z_k X$, so ist V das untere, das generische, Primelement $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[t] = p^* W$ in der Faser $X[t]_W = X[t]_{\mathfrak{p}} = \text{Spec}(k(\mathfrak{p})[t])$. Damit ist V als $p^* W$, also als Element von $p^* A_k X$ nachgewiesen.

Ist V aber ein oberes, also abgeschlossenes, Primelement in der Faser $X[t]_W$, so ist das generische Primelement der Faser $V' \supseteq V$ mit $V' \in Z_{k+2} X[t]$ und es ist $V' = p^* W = W[t]$ für ein $W \in Z_{k+1} X$. Nun ist aber $A_{k+1} V' = A^1(V') = \text{Cl}(W[t]) = \text{Cl}(W) = A^1(W) = A_k W$, wobei $\text{Cl}(W[t])$ und $\text{Cl}(W)$ für die Weildivisor Klassen sowie $A^1(V')$ und $A^1(W)$ als Bezeichnung der 1-kodimensionalen Zykelklassen stehe. Also ist $[V] \in A_{k+1} V'$ schon durch ein Element $\sum_i n_i [W'_i]$ von $A_k W$ mit $W'_i \in Z_k W$ gegeben, für das die rationale Äquivalenz $\sum_i n_i p^* W'_i \sim V$ in $Z_{k+1} V'$, also auch in $Z_{k+1} X[t]$, gilt.

Divisoren

2.1 Weildivisoren und Cartierdivisoren

Es sei X ein Schema und $\mathbf{OuvAff}(X)$ die Kategorie der affinen offenen Teilmengen $U = \text{Spec}(A)$ von X mit den durch die Abbildungen $A \rightarrow A_f$ induzierten offenen Immersionen als Morphismen.

Weiter sei für jeden Ring A die multiplikativ abgeschlossene Menge S_A gleich der Menge der Nichtnullteiler von A , also der $f \in A$ mit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} A$ injektiv. Wir nennen dann $Q(A) = S_A^{-1}A$ den *Funktionskörper* von A . Es gibt kanonische Abbildungen $Q(A) \rightarrow Q(A_g)$ für jedes $g \in A$.

Die Zuordnung $\mathcal{K}(U) = Q(\mathcal{O}_X(U))$ für jedes $U \subseteq X$, offen, affin, definiert also eine Prägarbe \mathcal{K}_X auf $\mathbf{OuvAff}(X)$, deren Garbifizierung eine Garbe auf X ist, die wir ebenfalls mit \mathcal{K}_X bezeichnen.

Es seien $\mathcal{O}_X^*(U)$ und $\mathcal{K}_X^*(U)$ die multiplikativen Gruppen, der von 0 verschiedenen Elemente von $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{K}_X(U)$. Diese definieren eine exakte Sequenz von multiplikativen abelschen Garben

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

Definition 2.1.1. *Es sei X ein Schema. Dann ist $\Gamma(X, \mathcal{D}) = \text{CaDiv } X$ die (abelsche) Gruppe der Cartier-Divisoren von X .*

Ein Cartier-Divisor D kann also als Familie (f_i, U_i) mit einer offenen Überdeckung $\bigcup_i U_i = X$ und $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$ angesehen werden, für die $g_{ij} = f_i^{-1}f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ ist, mit $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Die Summe zweier Cartierdivisoren $D = (f_i, U_i)$ und $D' = (f'_i, U_i)$ ist $D + D' = (f_i f'_i, U_i)$, der inverse Cartierdivisor $-D$ ist (f_i^{-1}, U_i) .

Definition 2.1.2. *Es sei X ein Schema. Ein Cartier-Divisor der Form (f, X) mit $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$ heißt Hauptdivisor, geschrieben $\text{div}(f) = (f)$.*

Proposition 2.1.1. *Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe $\text{CaDiv}^h X \subseteq \text{CaDiv } X$.*

Definition 2.1.3. Sind $D, D' \in \text{CaDiv } X$ und ist $D - D'$ ein Hauptdivisor, so heißen D, D' linear äquivalent.

Definition 2.1.4. Die Quotientengruppe

$$\text{CaCl } X = \text{CaDiv } X / \text{CaDiv}^h X \quad (2.2)$$

ist die Gruppe der Cartierdivisorenklassen auf X .

Definition 2.1.5. Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartier-Divisor auf X . Weiter sei $V \subseteq X$ eine 1-kodimensionale Untervarietät von X . Dann ist

$$v_V(D) = v_{\mathcal{O}_{X,V}}(f_i) \quad (2.3)$$

für ein i mit $U_i \cap V \neq \emptyset$. Da $f_i^{-1}f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ ist die Definition von dem gewählten i unabhängig.

Definition 2.1.6. Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$. Dann ist

$$\text{Div } X = Z_{n-1}(X) \quad (2.4)$$

die Gruppe der Weildivisoren von X und

$$\text{Cl } X = A_{n-1}(X) = Z_{n-1}(X) / \text{Rat}_{n-1}(X) \quad (2.5)$$

die Gruppe der Weildivisorenklassen von X .

Definition 2.1.7. Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$ und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor auf X . Dann ist

$$[D] = \sum_V v_V(D) V \in \text{Div } X = Z_{n-1}(X) \quad (2.6)$$

wobei V durch die 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, der zu D assoziierte Weil-Divisor.

Proposition 2.1.2. Es sei X eine Varietät mit $\dim X = n$. Dann definiert $D \mapsto [D]$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{CaDiv } X \rightarrow \text{Div } X \quad (2.7)$$

von den Cartierdivisoren in die Weildivisoren.

Dabei wird $\text{CaDiv}^h X$ nach $\text{Rat}_{n-1}(X)$ abgebildet, denn es ist

$$[\text{div}(f)] = \text{div}_X(f) \quad (2.8)$$

mit dem weiter oben eingeführten $\text{div}_X(f) \in \text{Rat}_{n-1}(X) \subseteq Z_{n-1}(X)$. Man hat also auch eine induzierte Abbildung

$$\text{CaCl } X \rightarrow \text{Cl } X \quad (2.9)$$

Definition 2.1.8. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i) \in \text{CaDiv } X$ ein Cartierdivisor auf X . Dann ist*

$$|D| = \text{supp } D = \bigcup_{\substack{V \subseteq X \\ V \text{ Varietät} \\ f_V \notin \mathcal{O}_{X,V}^*}} V \quad \text{wobei } f_V = f_i \text{ mit } U_i \cap V \neq \emptyset \quad (2.10)$$

der Support von D in X . Die Definition ist wegen $f_i^{-1}f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ unabhängig von der Wahl des jeweiligen i für V .

Anmerkung 2.1.1. Auf $U = X - |D|$ ist $\mathcal{O}_X(D)|_U \cong \mathcal{O}_U$. Damit existiert ein der $1 \in \mathcal{O}_U$ entsprechender trivialisierender Schnitt $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(U)$.

Anmerkung 2.1.2. Wir können den zu einem Cartierdivisor D assoziierten Weildivisor $[D]$ auch schreiben als

$$[D] = \sum_V v_V(D) V \quad (2.11)$$

wobei V jetzt nicht durch alle 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, sondern nur durch diejenigen mit $V \subseteq |D|$. Damit erkennen wir $[D] \in Z_{n-1}(|D|)$.

Neben der Zuordnung eines Weildivisors zu jedem Cartierdivisor auf einer Varietät X können wir auf einem beliebigen Schema X einem Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ ein Linienbündel $\mathcal{O}_X(D)$ zuordnen.

Definition 2.1.9. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ aus $\text{CaDiv } X$. Dann ist $\mathcal{O}_X(D)$ mit*

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i} \quad (2.12)$$

ein Linienbündel zusammen mit einer Inklusion $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$.

Anmerkung 2.1.3. Wir schreiben auch manchmal $L(D)$ für $\mathcal{O}_X(D)$.

Es seien L, L_1, L_2 Linienbündel auf einem Schema X . Dann ist auch $L^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ und $L_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} L_2$ ein Linienbündel auf X . Die erste Abbildung definiert dabei ein Inverses für die Multiplikation, die durch die zweite Abbildung gegeben wird. Dabei ist \mathcal{O}_X , als Linienbündel aufgefaßt, das neutrale Element.

Definition 2.1.10. *Wir bezeichnen die Gruppe der Linienbündel auf einem Schema X mit $\mathbf{L}(X)$ und die Gruppe der Isomorphieklassen von Linienbündeln mit $\text{Pic } X$.*

Proposition 2.1.3. *Für ein Schema X ist $\text{Pic } X = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.*

Für einen Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ gibt es ein kanonisch zugeordnetes Element $c(D) \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Dieses wird durch $U_{i_0 i_1} \mapsto f_{i_0}^{-1}f_{i_1}$ als Element von $\check{H}^1((U_i), \mathcal{O}_X^*)$ gegeben.

Proposition 2.1.4. *Es sei X ein beliebiges Schema. Die Abbildung $D \rightarrow \mathcal{O}_X(D)$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $\text{CaDiv } X \rightarrow \mathbf{L}(X)$. Es ist also*

$$\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') = \mathcal{O}_X(D + D') \quad (2.13)$$

$$\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_X(D)^{-1} \quad (2.14)$$

Proposition 2.1.5. *Es sei X ein Schema, D ein Cartierdivisor und $\mathcal{O}_X(D)$ das zugeordnete Linienbündel. Dann ist äquivalent*

- a) *Es ist $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$.*
- b) *Es ist $D \in \text{CaDiv}^h X$, ein Hauptdivisor.*

Es ist also $c(D) = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ genau für die Hauptdivisoren $D \in \text{CaDiv}^h X$. Damit ist $D \rightarrow c(D)$ eine wohldefinierte und injektive Abbildung $\text{CaCl } X \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Weiterhin ergeben die beiden vorangehenden Propositionen eine injektive Abbildung $\text{CaCl } X \rightarrow \text{Pic } X$.

Proposition 2.1.6. *Wir haben ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{CaCl } X & \xrightarrow{\beta} & \text{Pic } X \\ \downarrow \alpha & \swarrow \gamma & \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & & \end{array} \quad (2.15)$$

Dabei sind die Abbildungen α, β, γ die oben eingeführten, insbesondere ist $\alpha(D) = c(D)$. Die Abbildungen α und β sind injektiv, die Abbildung γ ist, wie oben bemerkt, ein Isomorphismus.

Proposition 2.1.7. *Ist X eine Varietät, so ist $\text{CaCl } X \rightarrow \text{Pic } X$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus.*

Dies folgt, da für eine Varietät X die Garbe \mathcal{K}_X wekl ist, aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$ und der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz.

Definition 2.1.11. *Es sei X ein beliebiges Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor. Weiter sei $\mathcal{O}_X(D)$ das assoziierte Linienbündel ($f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$). Es sei $Z = |D|$ der Support von D und $U = X - Z$, sowie $U'_i = U_i \cap U$. Es ist dann $f_i|_{U'_i} \in \mathcal{O}_X^*(U'_i)$, also $1 \in f_i^{-1}\mathcal{O}_{U'_i} \subseteq \mathcal{K}_X(U'_i)$.*

Die einzelnen $1 = 1_{U'_i}$ verkleben zu einem Schnitt $1 \in \mathcal{O}_X(D)(U) \subseteq \mathcal{K}_X(U)$. Diesen nennen wir auch s_D .

2.1.1 Pseudodivisoren

Definition 2.1.12. *Es sei X ein Schema und (L, Z, s) ein Tripel bestehend aus einem Linienbündel L auf X , einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subseteq X$ und einem nirgends verschwindenden Schnitt $s \in L(X - Z)$.*

Dann heißt (L, Z, s) Pseudodivisor auf X . Es heißen L das Linienbündel, Z der Support und s der Schnitt des Pseudodivisors.

Definition 2.1.13. Zwei Pseudodivisoren (L, Z, s) und (L', Z', s') auf einem Schema X heißen äquivalent, wenn $Z = Z'$ ist und ein \mathcal{O}_X -Isomorphismus $\sigma : L \rightarrow L'$ existiert, so daß $\sigma_{X-Z}(s) = s'$ ist.

Definition 2.1.14. Es sei D ein Cartier-Divisor auf einem Schema X . Weiter sei $\mathcal{O}_X(D)$ sein zugehöriges Linienbündel, $|D|$ sein Support und $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(X - |D|)$ sein assoziierter trivialisierender Schnitt.

Dann ist $(\mathcal{O}_X(D), |D|, s_D)$ der zu D gehörige Pseudodivisor.

Definition 2.1.15. Ein Pseudodivisor (L, Z, s) wird von einem Cartier-Divisor D repräsentiert, falls

- i) $|D| \subseteq Z$ gilt.
- ii) Ein Isomorphismus $\sigma : \mathcal{O}_X(D) \rightarrow L$ existiert, der auf $X - Z$ den Schnitt s_D in s überführt.

Proposition 2.1.8. Es sei X eine Varietät und (L, Z, s) ein Pseudodivisor auf X . Dann wird (L, Z, s) durch einen Cartier-Divisor $D \in \text{CaDiv } X$ repräsentiert.

Es gilt

1. Ist $Z \neq X$, so ist D als Element von $\text{CaDiv } X$ eindeutig bestimmt.
2. Ist $Z = X$, so ist D als Element von $\text{CaCl } X$, also als Divisorenklasse eindeutig bestimmt.

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung, da durch sie später für eine k -Untervarietät $j : V \subseteq X$ eines beliebigen Schemas X und einen Pseudodivisor D auf X , der Schnitt $D \cdot [V] = [j^*D] \in A_{k-1}(|D| \cap V)$ eingeführt werden wird.

Definition 2.1.16. Es sei D ein Pseudodivisor auf einer n -dimensionalen Varietät X mit Support $Z = |D|$.

Dann definiert man die zugehörige Weildivisorenklasse

$$[D] \in A_{n-1}(|D|) \tag{2.16}$$

wie folgt:

Es sei \tilde{D} ein Cartierdivisor auf X , der D repräsentiert.

1. Ist $Z \neq X$, so ist \tilde{D} als Element von $\text{CaDiv } X$ eindeutig bestimmt. Wir setzen dann

$$[D] = [\tilde{D}] \tag{2.17}$$

Dabei ist $[\tilde{D}]$ der zu \tilde{D} assoziierte Weildivisor aufgefaßt als Zykel in $Z_{n-1}(|\tilde{D}|)$, also

$$[\tilde{D}] = \sum_V \text{ord}_V(\tilde{D})[V] \in Z_{n-1}(|\tilde{D}|) = A_{n-1}(|\tilde{D}|)$$

wobei über die irreduziblen Komponenten V von $|\tilde{D}|$ summiert wird.

Da $|\tilde{D}| \subseteq |D| = Z$ erhalten wir ein Bild in $Z_{n-1}(|D|) = A_{n-1}(|D|)$

2. Ist $Z = X$, so ist \tilde{D} als Element von $\text{CaCl}X$ eindeutig bestimmt, also für einen repräsentierenden Divisor \tilde{D} ist $[\tilde{D}] \in Z_{n-1}(X)$ bis auf Elemente von $\text{Rat}_{n-1}(X)$ eindeutig bestimmt. Damit ist $[\tilde{D}]$ in $A_{n-1}(X) = A_{n-1}(|D|)$ eindeutig festgelegt.

Definition 2.1.17. Es seien $D = (L, Z, s)$ und $D' = (L', Z', s')$ zwei Pseudodivisoren auf einem Schema X .

Dann sei

$$D + D' = (L \otimes_{\mathcal{O}_X} L', Z \cup Z', s \otimes s') \quad (2.18)$$

$$-D = (L^{-1}, Z, s^{-1}) \quad (2.19)$$

Proposition 2.1.9. Für ein festes $Z \subseteq X$ bilden die Pseudodivisoren D mit $\text{supp } D = Z$ eine abelsche Gruppe.

Definition 2.1.18. Es sei $f : X' \rightarrow X$ ein Schemamorphismus und $D = (L, Z, s)$ ein Pseudodivisor auf X . Dann ist $f^*D = (f^*L, f^{-1}(Z), f^*(s))$ der pull-back von D auf X' .

Proposition 2.1.10. Für $g : X'' \rightarrow X'$ und $f : X' \rightarrow X$ sowie einen Pseudodivisor D auf X gilt

$$g^*f^*(D) = (f \circ g)^*(D) \quad (2.20)$$

Weiterhin gilt für Pseudodivisoren D, D' auf X , daß

$$f^*(D + D') = f^*D + f^*D' \quad (2.21)$$

mit der oben eingeführten Addition von Pseudodivisoren.

2.1.2 Schnitte mit Divisoren

Definition 2.1.19. Es sei D ein Pseudodivisor auf einem Schema X und V eine k -dimensionale Untervarietät von X mit Einbettung $j : V \rightarrow X$. Dann ist j^*D ein Pseudodivisor auf V mit $|j^*D| = V \cap |D|$.

Dann sei

$$D \cdot [V] = D \cdot V = [j^*D] \in A_{k-1}(V \cap |D|) \quad (2.22)$$

Anmerkung 2.1.4. Ist D ein Cartier-Divisor auf X , so kann man $D \cdot [V]$ auch folgendermaßen konstruieren: Ist $|D| \not\supseteq V$, so ist j^*D ein Cartierdivisor auf V . Man bilde den zu j^*D assoziierten Weildivisor in $Z_{k-1}(|D| \cap V)$ und nenne sein Bild in $A_{k-1}(|D| \cap V)$ dann $D \cdot [V]$.

Ist $|D| \supseteq V$, so wähle einen Cartier-Divisor C auf V , so daß $\mathcal{O}_V(C) \cong j^*\mathcal{O}_X(D)$ ist. Dann sei $D \cdot [V]$ das Bild des zu C assoziierten Weildivisors $[C]$ aus $Z_{k-1}(V)$ in $A_{k-1}(V)$. Der Divisor C ist nur bis auf einen Hauptdivisor bestimmt, aber sein Bild in $A_{k-1}(V)$ ist eindeutig.

Anmerkung 2.1.5. Wir nennen $D \cdot [V]$ auch das Bild von $D \cdot [V]$ in jedem $A_{k-1}(Y)$ für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $V \cap |D| \subseteq Y$.

Anmerkung 2.1.6. Ist für ein Schema X das Linienbündel $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial, so kann man sogar eine Abbildung $Z_k(X) \rightarrow Z_{k-1}(|D|)$ konstruieren. Man setze für $j : V \rightarrow X$ dann $D \cdot V = [j^*D]$ falls $V \not\subseteq |D|$ und $D \cdot V = 0$, falls $V \subseteq |D|$. Im letzteren Fall würde die explizite Konstruktion von oben die Wahl eines Cartier-Divisors C auf V verlangen, für den $\mathcal{O}_V(C) = j^*\mathcal{O}_X(D)$ ist. Da $j^*\mathcal{O}_X(D)$ wegen $j(V) \subseteq |D|$ und der Annahme vom Anfang trivial ist, muß auch $\mathcal{O}_V(C) = \mathcal{O}_V$ sein. Es ist dann sinnvoll $D \cdot V = 0$ zu setzen.

Der Fall $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial tritt zum Beispiel für (global) prinzipale Cartierdivisoren D auf, diese werden unter der kanonische Abbildung $\text{CaDiv } X \rightarrow \text{Pic } X$ auf die Isomorphieklasse des trivialen Bündels \mathcal{O}_X abgebildet.

Definition 2.1.20. Es sei $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ ein algebraischer Zykel im Schema X . Dann ist $|\alpha| = \bigcup_{n_V \neq 0} V$, der Support von α .

Definition 2.1.21. Ist $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ ein algebraischer Zykel, so definieren wir

$$D \cdot \alpha = \sum_V n_V (D \cdot [V]) \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \quad (2.23)$$

Anmerkung 2.1.7. Für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $|D| \cap |\alpha| \subseteq Y \subseteq X$ sei $D \cdot \alpha$ auch das Bild von $D \cdot \alpha \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|)$ unter $A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \rightarrow A_{k-1}(Y)$.

Proposition 2.1.11. a) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $\alpha, \alpha' \in Z_k(X)$. Dann ist

$$D \cdot (\alpha + \alpha') = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha' \quad (2.24)$$

in $A_{k-1}(|D| \cap (|\alpha| \cup |\alpha'|))$.

b) Es seien D, D' Pseudodivisoren auf X und $\alpha \in Z_k(X)$. Dann ist

$$(D + D') \cdot \alpha = D \cdot \alpha + D' \cdot \alpha \quad (2.25)$$

in $A_{k-1}((|D| \cup |D'|) \cap |\alpha|)$

c) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $f : X' \rightarrow X$ ein eigentlicher Schemamorphismus, $\alpha \in Z_k(X')$ und $g : f^{-1}(|D|) \cap |\alpha| \rightarrow |D| \cap f(|\alpha|)$.

Dann ist

$$g_*(f^*D \cdot \alpha) = D \cdot f_*\alpha \quad (2.26)$$

in $A_{k-1}(|D| \cap f(|\alpha|))$.

d) Es sei D ein Pseudodivisor auf X und $f : X' \rightarrow X$ ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension n . Weiter sei $\alpha \in Z_k(X)$ und $g : f^{-1}(|D| \cap |\alpha|) \rightarrow |D| \cap |\alpha|$.

Dann ist:

$$f^*(D) \cdot f^*\alpha = g^*(D \cdot \alpha) \quad (2.27)$$

in $A_{k+n-1}(f^{-1}(|D| \cap |\alpha|))$.

e) Ist D ein Pseudodivisor auf X mit trivialem Linienbündel L_D auf X und $\alpha \in Z_k(X)$, dann ist

$$D \cdot \alpha = 0 \quad (2.28)$$

in $A_{k-1}(|\alpha|)$.

Wir betrachten für die beiden folgenden Lemmata cartesische Quadrate

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y' \end{array} \quad (2.29)$$

mit offenen Immersionen j, j' .

Lemma 2.1.1. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D , Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(X')$:*

$$f'_*(f'^*D \cdot \alpha) = D \cdot f'_*\alpha \quad (2.30)$$

Dann gilt die Aussage c) der vorigen Proposition für $f : X \rightarrow Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j^*(f_*(f^*D \cdot \alpha)) &= f'_*j'^*(f^*D \cdot \alpha) = f'_*(j'^*f^*D \cdot j'^*\alpha) = \\ &= f'_*(f'^*j^*D \cdot j'^*\alpha) = j^*D \cdot f'_*j'^*\alpha = j^*D \cdot j^*f_*\alpha = j^*(D \cdot f_*\alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \rightarrow Y'$ eine Überdeckung von $f : X \rightarrow Y$ darstellen, gilt die Aussage c) für f unter der Annahme, daß sie für alle f' gilt.

Lemma 2.1.2. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D , Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(Y')$:*

$$f'^*D \cdot f'^*\alpha = f'^*(D \cdot \alpha) \quad (2.31)$$

Dann gilt die Aussage d) der vorigen Proposition für $f : X \rightarrow Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j'^*(f'^*D \cdot f'^*\alpha) &= j'^*f'^*D \cdot j'^*f'^*\alpha = f'^*j^*D \cdot f'^*j^*\alpha = \\ &= f'^*(j^*D \cdot j^*\alpha) = f'^*j^*(D \cdot \alpha) = j'^*f'^*(D \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \rightarrow Y'$ eine Überdeckung von $f : X \rightarrow Y$ darstellen, gilt die Aussage d), falls sie für alle f' gilt.

Lemma 2.1.3. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n . Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf Y . Dann ist*

$$[f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] \quad (2.32)$$

Beweis. Man habe das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & U \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & V \end{array}$$

mit $V = \text{Spec}(A)$ und $U = \text{Spec}(B)$, offen. Es sei D auf V gegeben als (a) mit einem Nichtnullteiler $a \in A$. Dann ist auch $f^*D|_U = (a)$ mit a aufgefaßt als Element von B . Wegen $0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A$ und der exakten Tensorierung $- \otimes_A B$ ist a auch in B Nichtnullteiler. Es ist also

$$[f'^*D] = [\text{Spec}(B/aB)] = [\text{Spec}(B \otimes A/a)] = [f'^{-1}D] = f'^*[D]$$

Man nehme nun im folgenden an, daß die Aussage des Lemmas für f eine offene Inklusion schon richtig sei.

Damit ist dann

$$\begin{aligned} j'^*[f^*D] &= [j'^*f^*D] = [f'^*j^*D] = f'^*[j^*D] = f'^*[j^{-1}D] = f'^*j^*[D] = \\ &= j'^*f^*[D] = j'^*[f^{-1}D] \end{aligned}$$

Da U, V allgemein gewählt waren, folgt $[f^*D] = [f^{-1}D] = f^*[D]$.

Lemma 2.1.4. *Es sei $f : X \rightarrow V$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n und V eine Varietät. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf V und es sei*

$$[X] = \sum_i l_i[X_i]$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, notwendig gleicher Dimension $\dim V + n$. Dann ist

$$f^*D \cdot f^*[V] = [f^*D] = [f^{-1}D] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \quad (2.33)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} f^*D \cdot f^*[V] &= f^*D \cdot [X] = f^*D \cdot \left(\sum_i l_i[X_i] \right) = \\ &= \sum_i l_i(f^*D \cdot [X_i]) = \sum_i l_i[f^*D \cap X_i] = \\ &= [f^*D \cap X] = [f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

Nun schließlich zum Beweis von d):

Beweis. Man habe im allgemeinen Fall das cartesische Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & f^{-1}(V) \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{j} & V \end{array}$$

wobei man durch weitere Lokalisierung und Ausnutzen der Additivität in D annehmen kann, daß D auf Y ein effektiver Cartierdivisor ist. Dann gilt mit $\tilde{D} = j^*D$:

$$\begin{aligned} f^*(D) \cdot f^*[V] &= f^*(D) \cdot f^*j_*[V] = f^*(D) \cdot j'_*f'^*[V] = \\ &= j'_*(j'^*f^*(D) \cdot f'^*[V]) = j'_*(f'^*j^*(D) \cdot f'^*[V]) = \\ &= j'_*(f'^*\tilde{D} \cdot f'^*[V]) = j'_*f'^*(\tilde{D} \cdot [V]) = \\ &= f^*j_*(j^*D \cdot [V]) = f^*(D \cdot j_*[V]) = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

2.2 Kommutativität der Schnittklassen

2.3 Chern–Klasse eines Linienbündels

2.4 Gysin–Abbildung für Divisoren

Chern–Klassen von Vektorbündeln

3.1 Segre–Klassen

Es sei X ein algebraisches Schema und E ein Vektorbündel auf X vom Rang $e + 1$. Weiter sei $\mathbb{P}(E)$ das projektive Bündel über X mit der Abbildung $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$. Wir kürzen ab: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(d)$.

Definition 3.1.1. *Mit den Bezeichnungen von oben ist eine Abbildung*

$$s_i(E) : A_k(X) \rightarrow A_{k-i}(X), \quad \alpha \mapsto s_i(E) \cap \alpha \quad (3.1)$$

durch

$$s_i(E) \cap \alpha = p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) \quad (3.2)$$

Wir nennen E die i -te Segre–Klasse von E .

Es sei jetzt $f : X' \rightarrow X$ eine Abbildung von algebraischen Schemata und es bestehe das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(f^*E) & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad (3.3)$$

Wir kürzen wieder ab $\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E)}(d)$ und bemerken $f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d)$.

Es gelten dann folgende Beziehungen

Proposition 3.1.1 (eigentliche Projektion). *Es sei mit den eben eingeführten Bezeichnungen $f : X' \rightarrow X$ eine eigentliche Abbildung und $\alpha \in A_*(X')$. Dann gilt:*

$$f_*(s_i(f^*E) \cap \alpha) = s_i(E) \cap f_*\alpha \quad (3.4)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f_*(s_i(f^*E) \cap \alpha) &= f_*p'_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha) = \\
&= f_*p'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha) = \\
&= p_*f'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha) = \\
&= p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap f'_*p'^*\alpha) = \\
&= p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*f_*\alpha) = s_i(E) \cap f_*\alpha \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.2 (flacher Pullback). *Es sei mit den obigen Bezeichnungen $f : X' \rightarrow X$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und $\alpha \in A_*(X)$. Dann gilt:*

$$f^*(s_i(E) \cap \alpha) = s_i(f^*E) \cap f^*\alpha \quad (3.6)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f^*(s_i(E) \cap \alpha) &= f^*p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) = \\
&= p'_*f'^*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) = \\
&= p'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap f'^*p^*\alpha) = \\
&= p'_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))^{e+i} \cap p'^*f^*\alpha) = s_i(f^*E) \cap f^*\alpha \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.3. *Es sei $X, E, \alpha \in A_*(X)$ wie oben. Dann ist*

$$s_i(E) \cap \alpha = 0, \text{ für } i < 0 \quad (3.8)$$

$$s_0(E) \cap \alpha = \alpha \quad (3.9)$$

Proposition 3.1.4. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E, F Vektorbündel auf X vom Rang $e+1$ und $f+1$. Dann ist*

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha) \quad (3.10)$$

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& \tilde{\mathbb{P}} & \\
r \swarrow & & \searrow s \\
\mathbb{P}(E) & & \mathbb{P}(F) \\
p \searrow & & \swarrow q \\
& X &
\end{array} \quad (3.11)$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) &= p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap p^*q_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap q^*\alpha)) = \\
&= p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap r_*s^*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap q^*\alpha)) = \\
&= p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap r_*(c_1(s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap s^*q^*\alpha)) = \\
&= p_*r_*(c_1(r^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap c_1(s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap s^*q^*\alpha) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Beachtet man nun $p_*r_* = q_*s_*$ und $s^*q^* = r^*p^*$ und durchläuft obige Umformung analog rückwärts, so entsteht $s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha)$.

Proposition 3.1.5. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E ein Linienbündel. Dann ist*

$$s_1(E) \cap \alpha = -c_1(E) \cap \alpha \quad (3.13)$$

3.2 Chern-Klassen

Es sei X ein algebraisches Schema wie im vorigen Abschnitt und $E, p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ ebenso wie oben definiert.

Definition 3.2.1. *Es sei $c_i(E)$ für $i \geq 0$ durch die Beziehung*

$$(1 + s_1(E)t + s_2(E)t^2 + \cdots)(c_0(E) + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \cdots) = 1 \quad (3.14)$$

als Identität formaler Potenzreihen in t definiert.

Anmerkung 3.2.1. Es ist also

$$c_i(E) = P_i(s_1(E), \dots, s_i(E))$$

mit einem gewichtet homogenen Polynom $P_i(T_1, \dots, T_i) \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_i]$ vom Grad i , bei dem T_j das Gewicht j hat. Eine rekursive Berechnung von P_i ist mit

$$c_0(E) = 1 \quad (3.15)$$

$$c_1(E) = -s_1(E) \quad (3.16)$$

und

$$c_i(E) = - (c_{i-1}(E)s_1(E) + c_{i-2}(E)s_2(E) + \cdots + c_1(E)s_{i-1}(E) + s_i(E)) \quad (3.17)$$

möglich.

Anmerkung 3.2.2. Die $c_i(E)$ definieren also eine Abbildung

$$c_i(E) : A_k(X) \rightarrow A_{k-i}(X), \quad \alpha \mapsto c_i(E) \cap \alpha \quad (3.18)$$

durch

$$c_i(E) \cap \alpha = P_i(s_1(E), \dots, s_i(E)) \cap \alpha \quad (3.19)$$

Die drei grundlegenden Beziehungen des vorigen Abschnitts für die $s_i(E)$ gelten mutatis mutandis auch für die $c_i(E)$:

Proposition 3.2.1 (eigentliche Projektion). *Es sei mit den eben eingeführten Bezeichnungen $f : X' \rightarrow X$ eine eigentliche Abbildung und $\alpha \in A_*(X')$. Dann gilt:*

$$f_*(c_i(f^*E) \cap \alpha) = c_i(E) \cap f_*\alpha \quad (3.20)$$

Proposition 3.2.2 (flacher Pullback). *Es sei mit den obigen Bezeichnungen $f : X' \rightarrow X$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und $\alpha \in A_*(X)$. Dann gilt:*

$$f^*(c_i(E) \cap \alpha) = c_i(f^*E) \cap f^*\alpha \quad (3.21)$$

Proposition 3.2.3. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E, F Vektorbündel auf X vom Rang $e + 1$ und $f + 1$. Dann ist*

$$c_i(E) \cap (c_j(F) \cap \alpha) = c_j(F) \cap (c_i(E) \cap \alpha) \quad (3.22)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Chernklassen $c_i(E)$ ist ihr Verschwinden für $i > \text{rang } E$:

Proposition 3.2.4. *Es sei $X, E, \alpha \in A_*(X)$ wie oben. Dann ist*

$$c_i(E) \cap \alpha = 0, \text{ für } i < 0 \text{ und } i > \text{rang } E \quad (3.23)$$

$$c_0(E) \cap \alpha = \alpha \quad (3.24)$$

Deformation in den Normalkegel

4.1 Die Gerstenhaber–Algebra

4.1.1 Definition

Es sei A ein kommutativer Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und $R = A[T]$. Wir betrachten den gradierten Ring S zur Aufblasung $\text{Bl}_{(I,T)} A[T]$, also zur Aufblasung von $\text{Spec}(R)$ am Unterschema $V((I, T))$.

Es ist

$$S = R[Te, Ie] = \bigoplus_{d \geq 0} (I, T)^d \quad (4.1)$$

Anders gesagt haben wir

$$S_d = I^d e^d + I^{d-1} T e^d + \cdots + I T^{d-1} e^d + T^d e^d R \quad (4.2)$$

Wir haben in S zwei Elemente, die wir mit „ T “ ansprechen können, zum einen $T \in S_0 = R$, zum anderen $Te \in S_1$.

Zunächst betrachten wir

$$S/(TeS) = R[Ie] = A[T] \oplus \bigoplus_{d \geq 1} I^d = B' \quad (4.3)$$

Nun ist $I^d e^d A[T]$ modulo Te gleich $I^d A$. Das heißt $A[T]$ operiert auf B'_d vermöge $A[T] \rightarrow A = A[T]/TA[T]$. Also faktorisiert

$$\text{proj}(B') \rightarrow \text{Spec}(A[T])$$

als

$$\text{proj}(B') \rightarrow \text{Spec}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(A[T]),$$

liegt also über $V(T) \subseteq \text{Spec}(R)$, wie zu erwarten war.

Nachdem wir so $V(Te)$ in $\text{proj}(S)$ betrachtet haben, gehen wir zu $D_+(Te)$ über und analysieren $B = S_{(Te)}$. Es handelt sich dabei um die sogenannte *Gerstenhaber–Algebra*

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} B_{(Te)} &= \bigcup_{d>0} \frac{I^d e^d + I^{d-1} T e^d + \dots + IT^{d-1} e^d + RT^d e^d}{T^d e^d} = \\ &= \bigcup_{d>0} I^d T^{-d} + I^{d-1} T^{-(d-1)} + \dots + IT^{-1} + R \end{aligned} \quad (4.4)$$

Offensichtlich lassen sich alle diese Terme in den \mathbb{Z} -gradierten Ring

$$B = \dots \oplus I^d T^{-d} \oplus I^{d-1} T^{-d+1} \oplus \dots \oplus IT^{-1} \oplus A \oplus AT \oplus AT^2 \oplus \dots \quad (4.5)$$

einbetten und sind in ihrer Vereinigung diesem gleich.

Definition 4.1.1. *Der Ring $B = B^\circ$ ist die Gerstenhaber-Algebra.*

Wir betrachten geometrisch $\text{Spec}(B) = \text{Spec}(S_{(Te)}) = D_+(Te) \subseteq \text{proj}(S)$ als zugehöriges Schema. Da B eine $A[T]$ -Algebra ist, gibt es einen Morphismus $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A[T])$, sogar Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(B) & \xrightarrow{\quad} & \text{proj}(S) & B = S_{(Te)} & \xleftarrow{\quad} & S \\ & \searrow & \swarrow & \swarrow & \nwarrow & \nearrow \\ & & \text{Spec}(A[T]) & & & A[T] \end{array} \quad (4.6)$$

Es gilt

$$B_T = A[T, T^{-1}] \quad (4.7)$$

$$B/TB = \bigoplus_{d \geq 0} I^d / I^{d+1} T^{-d} = \bigoplus_{d \geq 0} I^d / I^{d-1} \quad (4.8)$$

Damit ist die Faser von $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A[T])$ über $V(T) \subseteq \text{Spec}(A[T])$ gleich

$$\text{Spec} \left(\bigoplus_{d \geq 0} I^d / I^{d+1} \right) = C_I A$$

wobei $C_I A$ der Normalkegel von I in A ist.

4.1.2 Die Faser von $\text{Bl}_{(I,T)} A[T]$ über $V(T)$

Wir wollen als nächstes die Struktur von $\text{proj}(S)$ über $V(T) \subseteq \text{Spec}(A[T])$ untersuchen: Es ist

$$S_d = I^d R e^d + I^{d-1} T R e^d + \dots + IT^{d-1} R e^d + T^d R e^d \quad (4.9)$$

und damit

$$TS_d = I^d T R e^d + I^{d-1} T^2 R e^d + \cdots + I T^d R e^d + T^{d+1} R e^d \quad (4.10)$$

Also ist für $S' = S/(TS)$, also den projektiven Koordinatenring von $V(T) \subseteq \text{Bl}_{(I,T)} A[T]$ auch

$$\boxed{S'_d = I^d A e^d + I^{d-1}/I^d T A e^d + \cdots + I/I^2 T^{d-1} A e^d + A/I T^d e^d} \quad (4.11)$$

Wir betrachten jetzt in S' die beiden Unterschemata $V(IS')$ und $V(TeS')$. Ihre Ideale sind

$$\boxed{(IS')_d = IS'_d = I^{d+1} A e^d} \quad (4.12)$$

denn es ist ja $I \cdot I^{d-\mu}/I^{d-\mu+1} T^\mu A e^d = 0$.

Weiter ist

$$\boxed{\begin{aligned} (TeS')_d &= TeS'_{d-1} = \\ &= I^{d-1} T A e^d + I^{d-2}/I^{d-1} T^2 A e^d + \cdots \\ &\cdots + I/I^2 T^{d-1} A e^d + A/I T^d A e^d \end{aligned}} \quad (4.13)$$

Also ist auch

$$(IS')_d \cap (TeS')_d = (0) \quad (4.14)$$

und deshalb $V(IS') \cup V(TeS') = \text{proj}(S')$

Die Komponenten selbst diskutieren wir jetzt:

Als erstes betrachten wir $V(IS') = \text{proj}(S'/(IS')) = \text{proj}(S^{(v)})$ also

$$\boxed{\begin{aligned} (S'/(IS'))_d &= I^d/I^{d+1} A e^d + I^{d-1}/I^d T A e^d + \cdots \\ &\cdots + I/I^2 T^{d-1} A e^d + A/I T^d A e^d \end{aligned}} \quad (4.15)$$

und somit

$$S^{(v)} = S^\circ[Te] \quad (4.16)$$

mit

$$S^\circ = \bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1} \quad (4.17)$$

Es ist damit $V(I) \subseteq \text{proj}(S')$ gleich $\text{proj}(C_I A \oplus Te)$, also

$$\text{proj}(S^{(v)}) \supseteq D_+(Te) = \text{Spec}(C_I A),$$

und somit ist $D_+(Te)$ gleich dem Normalkegel von I in A .

Als zweites betrachten wir die Komponente $V(TeS') = \text{proj}(S'/(TeS')) = \text{proj}(S^{(h)})$. Es ist

$$\boxed{(S'/(TeS'))_d = I^d A e^d} \quad (4.18)$$

und damit

$$\text{proj}(S^{(h)}) = \text{proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} I^d\right) = \text{Bl}_I A \quad (4.19)$$

Anmerkung 4.1.1. Die Indizes in $S^{(v)}$ und $S^{(h)}$ stehen für *vertikal* und *horizontal*.

Der Schnitt der beiden Komponenten $V(IS')$ und $V(TeS')$ ist durch die Summe der Ideale gegeben:

$$\begin{aligned} (IS' + TeS')_d = \\ = I^{d+1}Ae^d + I^{d-1}TAe^d + I^{d-2}/I^{d-1}T^2Ae^d + \dots \\ \dots + I/I^2T^{d-1}Ae^d + A/IT^dAe^d \end{aligned} \quad (4.20)$$

und damit

$$(S'/(IS' + TeS'))_d = I^d/I^{d+1}Ae^d. \quad (4.21)$$

Also ist

$$V(IS') \cap V(TeS') = \text{proj} \left(\bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1} \right) \quad (4.22)$$

gleich der Strikt-Transformierten von $V(I)$ in $\text{Bl}_I A$.

4.1.3 Die Faser von $\text{Bl}_{(I,T)} A[T]$ über $V((I, T))$

Die Faser von $\text{proj}(S) \rightarrow \text{Spec}(A[T])$ über $V((I, T))$, also der *exzeptionelle Divisor* von $\text{Bl}_{(I,T)} A[T]$ ist schließlich gleich $\text{proj}(Q)$ mit

$$Q = \bigoplus_{d \geq 0} (I, T)^d / (I, T)^{d+1} = Q'[w] \quad (4.23)$$

mit

$$Q_d = (I^d/I^{d+1}) + (I^{d-1}/I^d)T + \dots + (I/I^2)T^{d-1} + (A/I)T^d \quad (4.24)$$

und

$$Q'_d = I^d/I^{d+1} \quad (4.25)$$

also

$$Q' = \bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1}.$$

Die Faser von $\text{Bl}_{(I,T)} R$ über $V((I, T))$ zerfällt somit in die beiden Teile $V(w) = \text{proj}(Q')$, also in den *exzeptionellen Divisor* von I in $\text{Bl}_I A$ und in $D_+(w) = \text{Spec}(Q') = C_I A$, also in den *Normalkegel* von I in A .

Der folgende Satz ist von großer Wichtigkeit für die Grundlegung der Schnitttheorie:

Proposition 4.1.1. *Es sei X ein rein k -dimensionales, noethersches Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist auch $C_Y X$ ein rein k -dimensionales Schema.*

Beweis. Ist $\text{Spec}(A) = X$ ein rein k –dimensionales Schema, so ist $X' = X \times \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(A[T])$ ein rein $(k + 1)$ –dimensionales Schema. Weiter sind $Y = V(I) \subseteq X$ und $Y \times \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(A/I[T]) \subseteq X'$ abgeschlossene Unterschemata, wobei $Y' = Y \times \{T = 0\} \subseteq X'$ keine der $(k + 1)$ –dimensionalen irreduziblen Komponenten von X' umfaßt.

Die Aufblasung $\text{Bl}_{Y'} X' = \text{proj}(S)$, die wir oben studiert haben, ist also nach einem Standardtheorem über Aufblasungen ebenfalls rein $(k + 1)$ –dimensional. Damit ist der exzeptionelle Divisor $E \subseteq \text{Bl}_{Y'} X'$ ein rein k –dimensionales Unterschema von $\text{Bl}_{Y'} X'$.

Nach obiger Überlegung zerfällt (in lokaler Betrachtung) E in $D_+(w) = C_I A$ und $V(w) = \text{Bl}_I A$. Damit ist der Normalkegel $C_Y X = C_I A$ ein offenes Unterschema eines rein k –dimensionalen Schemas und somit selbst ein rein k –dimensionales Schema.

4.1.4 Ein Lemma über die Gerstenhaber–Algebra

Es sei $I \subseteq A$ ein Ideal eines kommutativen Ringes A und $J \subseteq A$ ein weiteres Ideal. Weiter sei wie oben

$$B^\circ = B_I^\circ A = \dots + I^d T^{-d} + \dots + I T^{-1} + A + AT + \dots + AT^d + \dots \quad (4.26)$$

die zugehörige Gerstenhaber–Algebra. Weiter sei $J^\circ \subseteq B^\circ$ das größte Ideal, das die Beziehung

$$(B^\circ/J^\circ)_T = (B^\circ/JB^\circ)_T \quad (4.27)$$

erfüllt. Es gelte also

$$J^\circ = \{b^\circ \in B^\circ \mid T^e b^\circ \in JB^\circ, e \geq 0\} \quad (4.28)$$

so daß

$$J^\circ = \dots + (I^d \cap J)T^{-d} + \dots + (I \cap J)T^{-1} + J + JT + JT^2 + \dots + JT^d + \dots \quad (4.29)$$

ist.

Lemma 4.1.1. *Mit den oben eingeführten Begriffen ist*

$$B^\circ/(T, J^\circ) = C_{(I+J)}(A/J) = \bigoplus_{d \geq 0} (I^d + J)/(I^{d+1} + J) \quad (4.30)$$

Beweis. Nach (4.29) ist

$$B^\circ/J^\circ = \dots + I^d/(I^d \cap J)T^{-d} + \dots + I/(I \cap J)T^{-1} + A/J + (A/J)T + \dots + (A/J)T^d + \dots$$

oder eben

$$B^\circ/J^\circ = \cdots + (I^d + J)/JT^{-d} + \cdots + (I + J)/JT^{-1} + \\ + A/J + (A/J)T + \cdots + (A/J)T^d + \cdots$$

Daraus folgt sofort

$$B^\circ/(J^\circ, T) = (B^\circ/J^\circ)/T(B^\circ/J^\circ) = \bigoplus_{d \geq 0} (I^d + J)/(I^{d+1} + J) = C_{(I+J)}(A/J).$$

4.2 Der globale Fall

Für den globalen Fall der Deformation in den Normalkegel betrachte eine abgeschlossene Immersion

$$f : X \rightarrow Y$$

von algebraischen k -Schemata. Weiter sei $Y' = \mathbb{P}_k^1 \times_k Y$. Es sei T die projektive Koordinate von \mathbb{P}_k^1 und $i : X \hookrightarrow Y'$ die abgeschlossene Immersion von X in die Faser bei $T = \infty$ via f . Weiter sei \mathcal{J} die Idealgarbe des Unterschemas $i(X) \subseteq Y'$.

Definition 4.2.1. *Es sei*

$$M = M_X Y = \text{Bl}_{\mathcal{J}} Y'$$

die Aufblasung von Y' bei \mathcal{J} .

Nach den lokalen Betrachtungen oben ist M die globale Version des Schemas $\text{Bl}_{(I,T)} A[T]$. In diesem Schema war als offenes Unterschema $\text{Spec}(B^\circ)$, das Spektrum der Gerstenhaber–Algebra, enthalten gewesen.

Dementsprechend gibt es auch in M ein offenes Unterschema M° , so daß

$$M^\circ|_{\mathbb{P}_k^1 \times U}$$

für ein offenes Unterschema $U = \text{Spec}(A) \subseteq Y$ gleich $\text{Spec}(B^\circ)$ ist.

Definition 4.2.2. *Für $f : X \rightarrow Y$ wie oben ist $M^\circ = M_X^\circ Y$ der Deformationsraum in den Normalkegel.*

Es gilt dann, nach den obigen lokalen Betrachtungen, daß über $T = \infty$ die Faser von M° gleich dem Normalkegel $C_X Y$ ist. Diese Faser ist zugleich ein effektiver Divisor in M° , nämlich der Schnitt des exzeptionellen Divisors $E \subseteq M$ mit dem offenen Teil $M^\circ \subseteq M$.

4.2.1 Bildung von Schnitten

Proposition 4.2.1. *Wir haben ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{k+1}N & \xrightarrow{i_*} & A_{k+1}M^\circ & \xrightarrow{j^*} & A_{k+1}(Y \times \mathbb{A}_k^1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i^* & & \uparrow \pi^* \cong \\
 & & A_k N & \xleftarrow{\sigma} & A_k Y
 \end{array} \tag{4.31}$$

wobei die obere exakte Folge durch das Tripel

$$N \xrightarrow{i} M^\circ \supseteq M^\circ - N = \mathbb{A}_k^1 \times Y$$

induziert wird. Dabei ist $N = C_X Y$ der oben eingeführte Normalkegeldivisor in M° .

Beweis. Die Abbildung π^* entspricht dem Isomorphismus $\pi^* : A_k Y \rightarrow A_{k+1} \mathbb{A}_Y^1$ die durch die flache affine Bündelabbildung $\pi : \mathbb{A}_Y^1 \rightarrow Y$ induziert wird.

Weiterhin ist das Normalbündel $\mathcal{N}_{N|M^\circ}$ von N in M° trivial, so daß die Beziehung

$$i^* \circ i_* = 0$$

gilt. Damit ist die Abbildung $\sigma : A_k Y \rightarrow A_k N$ wohldefiniert.

Es sei nun im folgenden $f : X \rightarrow Y$ eine reguläre Immersion mit Kodimension d . Damit ist die Abbildung

$$s_N^* : A_k N \rightarrow A_{k-d} X \tag{4.32}$$

wohldefiniert durch

$$p^* \circ s_N^* = \text{id} \tag{4.33}$$

wobei die Isomorphismen $p^* : A_{k-d} X \rightarrow A_k N$ durch die flache Vektorbündelabbildung $p : N \rightarrow X$ induziert werden.

Ist nun $V \subseteq Y$ eine Untervarietät und $W = X \cap V$, so ist wegen Lemma 4.1.1

$$\sigma([V]) = [C_W V] \tag{4.34}$$

und damit

$$X \bullet V = s_N^*([C_W V]) = s_N^*(\sigma([V])) \tag{4.35}$$

Es folgt

Proposition 4.2.2. *Für eine reguläre Immersion $f : X \rightarrow Y$ von Kodimension d wie oben ist die Abbildung*

$$f^* : A_k Y \xrightarrow{\sigma} A_k N \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d} X, \quad V \mapsto X \bullet V \tag{4.36}$$

wohldefiniert auf dem Niveau von Zykelklassen.

4.2.2 Schnitte im allgemeinsten Fall

Im allgemeinsten Fall besteht ein cartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (4.37)$$

von algebraischen k -Schemata, wobei $f : X \rightarrow Y$ eine reguläre Immersion von Kodimension d ist.

Der Normalkegel $C_X Y = N_X Y$ ist dann ein Rang d Vektorbündel über X und $g'^* N_X Y = N$ ist ein Rang d Vektorbündel über X' .

Aus dem lokalen Quadrat für obiges globale Quadrat, also aus

$$\begin{array}{ccc} B/IB & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/I & \longleftarrow & A \end{array} \quad (4.38)$$

entnehmen wir, daß für $J = IB$ eine Surjektion

$$C_I A = \bigoplus_{p \geq 0} I^p / I^{p+1} \twoheadrightarrow \bigoplus_{p \geq 0} J^p / J^{p+1} = C_J B \quad (4.39)$$

also eine abgeschlossene Immersion

$$i' : \text{Spec}(C_{X'} Y') \hookrightarrow \text{Spec}(g'^* N_X Y) \quad (4.40)$$

besteht.

Für ein $V \in Z_k Y'$ und $W = f'^{-1} V$ ist $C_W V$ ein abgeschlossenes k -dimensionales Unterschema von $C_{X'} Y'$, also mit der Immersion $i' : C_{X'} Y' \hookrightarrow N = g'^* N_X Y$

$$i'_* [C_W V] \in Z_k N$$

Benutzt man die Isomorphie $s_N^* : A_k N \rightarrow A_{k-d} X'$, so entsteht eine Schnittabbildung

$$f^! : Z_k Y' \xrightarrow{V \mapsto i'_* [C_W V]} A_k N \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d} X' \quad (4.41)$$

Proposition 4.2.3. *Die eben eingeführte Abbildung $f^! : Z_k Y' \rightarrow A_{k-d} X'$ ist wohldefiniert auf der Ebene von Zykelklassen, nämlich mit*

$$f^! : A_k Y' \xrightarrow{\sigma} A_k(C_{X'} Y') \xrightarrow{i'_*} A_k(g'^* N_X Y) \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d} X' \quad (4.42)$$

Dabei wird σ wie oben aus dem Tripel

$$C_{X'} Y' \xrightarrow{i} M_{X'}^\circ Y' \supseteq M_{X'}^\circ Y' - C_{X'} Y'$$

und dem oben benutzten Diagramm gefunden.

5

Schnitte

Literaturverzeichnis

- [1] FULTON, William: *Intersection theory. 2nd ed.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 2. Berlin: Springer. xiii, 470 p. , 1998

Sachverzeichnis

Herbrandquotient 2