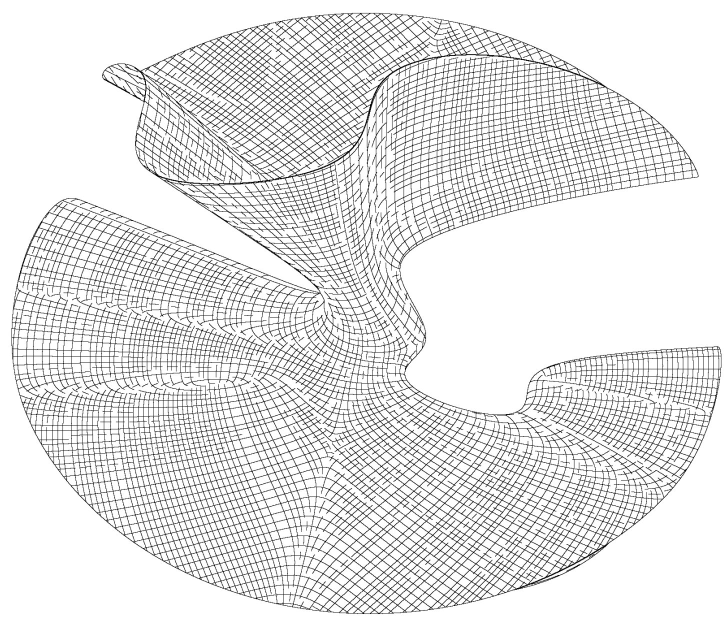
Jürgen Böhm

Schnitttheorie

5. Mai 2018

Für R G



Vorwort

Dieses Buch ist eine Einführung in die Schnittheorie der algebraischen Geometrie.

Das Buch orientiert sich an Fultons „Intersection Theory“ [1].

Der Autor freut sich über Rückmeldungen an

mathematik@aviduratas.de

mit allgemeinen Kommentaren zu dem Buch, besonders aber mit Meldungen über gefundene Fehler und problematische Stellen.

Wilhermsdorf, 2015 - *Jürgen Böhm*

Inhaltsverzeichnis

1

Einführung

1.1 Vorbereitung

1.1.1 Länge und artinsche Moduln

Definition 1.1.1. *Es sei M ein artinscher A–Modul mit maximaler unverfeinerbarer Kette $M_0 \subset \cdots \subset M_n$ von A–Untermoduln.*

Dann nennt man $\operatorname{len}_A M = n$ die Länge von M

Proposition 1.1.1. *Es sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Folge von artinschen Moduln. Dann gilt*

$$\operatorname{len}_A M = \operatorname{len}_A M' + \operatorname{len}_A M''.$$

Ist

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_r \to 0$$

eine exakte Sequenz artinscher Moduln, so ist

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \operatorname{len}_A M_i = 0$$

Proposition 1.1.2. *Es seien $(B, \mathfrak{q})$ und $(A, \mathfrak{p})$ zwei lokale Artinringe und B eine flache A–Algebra. Dann ist*

$$\operatorname{len} B = (\operatorname{len} A) \operatorname{len}(B/\mathfrak{p}B) \tag{1.1}$$

Beweis. Man wähle eine Filtrierung

$$A = M_r \supsetneq M_{r-1} \supsetneq M_{r-2} \supsetneq \cdots \supsetneq M_0 = (0)$$

von A–Moduln M_i mit

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to A/\mathfrak{p} \to 0,$$

so daß $r = \operatorname{len} A$.

Es ist $A^{n_i} \to M_i \to 0$ exakt und damit auch $B^{n_i} \to B \otimes_A M_i \to 0$ exakt und somit $\operatorname{len}_B M_i < \infty$. Da B/A flach, gilt

$$0 \to M_{i-1} \otimes_A B \to M_i \otimes_A B \to B/\mathfrak{p}B \to 0$$

mit artinschen Moduln an jeder Stelle. Bildet man von allen diesen Sequenzen die Beziehungen

$$\operatorname{len}(M_i \otimes_A B) = \operatorname{len}(M_{i-1} \otimes_A B) + \operatorname{len}(B/\mathfrak{p}B)$$

und addiert, so entsteht wegen $r = \operatorname{len} A$ und $M_r \otimes_A B = A \otimes_A B = B$ die behauptete Beziehung.

1.1.2 Herbrandquotienten

Das folgende Material ist aus Fulton [1] entnommen.

Es sei M ein A–Modul, $\varphi : M \to M$ ein A–Endomorphismus und es bezeichne ${}_\varphi M = \ker \varphi$ sowie $M_\varphi = M/\operatorname{im}\varphi = \operatorname{coker}\varphi$.

Definition 1.1.2. *Ist mit obigen Bezeichnungen* $\operatorname{len}_A {}_\varphi M < \infty$ *und* $\operatorname{len}_A M_\varphi < \infty$*, so ist*

$$e_A(\varphi; M) = e(\varphi; M) = \operatorname{len}_A M_\varphi - \operatorname{len}_A {}_\varphi M \tag{1.2}$$

der Herbrandquotient *von M bezüglich φ.*

Das untenstehende Diagramm wird im Beweis des nachfolgenden Satzes benötigt. In ihm ist M ein A–Modul und $\varphi, \psi : M \to M$ zwei A–Endomorphismen von M.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & & & 0 \\
 & & 0 & M_\psi \arrow[u] \arrow[l] & & M_{\psi\varphi} \arrow[ur] \arrow[ll] & \\
 & 0 \arrow[d] & & M \arrow[u] \arrow[urr] & & & \\
0 \arrow[r] & {}_\varphi M \arrow[r] \arrow[dd] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur] & M \arrow[u, "\psi"] \arrow[rr] & & M_\varphi \arrow[r] \arrow[uu, "\psi"] & 0 \\
 & & & & & X \arrow[u] & \\
 & {}_{\psi\varphi} M \arrow[uur, "\psi\varphi"] \arrow[rr, "\varphi"] & & {}_\psi M \arrow[uu] \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \\
0 \arrow[ur] & & & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Proposition 1.1.3. *Es sei M ein A–Modul wie oben und φ, ψ zwei Endomorphismen von M. Dann sind alle drei Herbrandquotienten $e(\varphi; M)$, $e(\psi; M)$, $e(\psi\,\varphi; M)$ definiert, wenn zwei von ihnen es sind.*

Es gilt dann auch

$$e(\psi\,\varphi; M) = e(\psi; M) + e(\varphi; M). \tag{1.4}$$

Beweis. Betrachte das obige Diagramm (1.3). In ihm läßt sich eine Abbildung von Y nach X konstruieren, indem man zu einem $y \in Y$ das Urbild in ${}_{\psi}M$ aufsucht, und es nach M und dann nach M_{φ} verschiebt.

Das so verschobene Element liegt dann sogar schon in X. Eine übliche Diagrammjagd ergibt unter Zugrundelegung dieser Definition für die Abbildung $X \to Y$ einen Isomorphismus $X \cong Y$.

Mit den beiden exakten Sequenzen aus dem Diagramm

$$0 \to_{\varphi} M \to_{\psi\varphi} M \to_{\psi} M \to Y \to 0$$

und

$$0 \to X \to M_{\varphi} \to M_{\psi\varphi} \to M_{\psi} \to 0$$

folgt die Behauptung des Satzes aus Proposition 1.1.1.

Lemma 1.1.1. *Es sei M ein endlich erzeugter freier A–Modul und $\phi : M \to M$ ein A–linearer Endomorphismus. Dann ist $e_A(\phi, M)$ genau dann definiert, wenn $e_A(\det(\phi), A)$ definiert ist und es gilt*

$$e_A(\phi, M) = e_A(\det(\phi), M) \tag{1.5}$$

Lemma 1.1.2. *Es sei A ein eindimensionaler lokaler Ring mit minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$. Weiter sei M ein endlich erzeugter A–Modul und $a \in A$ mit $a \notin \mathfrak{p}_j$ für alle j. Dann gilt*

$$\begin{aligned} e_A(a, M) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i) = \\ = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{len}_{A_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot \mathrm{len}_A(A/(\mathfrak{p}_i, aA)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Beweis. Filtriere M mit $0 = N_0 \subseteq \cdots \subseteq N_r = M$ und

$$0 \to N_{\nu-1} \to N_{\nu} \to A/\mathfrak{p}_{\nu} \to 0$$

mit $\mathfrak{p}_{\nu} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{q}\}$.

Der Ausdruck $e_A(a, N)$ ist für jeden endlich erzeugten A–Modul N wohldefiniert, denn a annulliert K und K' in

$$0 \to K \to N \xrightarrow{\cdot a} N \to K' \to 0,$$

so daß nur $\mathfrak{q}$ als assoziiertes Ideal auftreten kann, und damit K und K' von endlicher Länge sind. Also ist $e_A(a, N_{\nu})$ und $e_A(a, A/\mathfrak{p}_{\nu})$ wohldefiniert.

Es ist dann wegen

$$e_A(a, N_\nu) = e_A(a, N_{\nu-1}) + e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu)$$

auch

$$e_A(a, M) = \sum_{\nu=1}^{r} e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu)$$

Ist $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{q}$, so ist $e_A(a, A/\mathfrak{p}_\nu) = 0$. Wir brauchen also nur die Terme mit $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_{i(\nu)}$ betrachten.

Der Faktor $A/\mathfrak{p}_i$ tritt genau $\mathrm{len}(M_{\mathfrak{p}_i})$–mal in der Filtrierung auf, wie man, wie üblich, durch Lokalisieren $- \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$ der Filtrierung erkennt.

Es ist also

$$e_A(a, M) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{len}(M_{\mathfrak{p}_i}) \cdot e_A(a, A/\mathfrak{p}_i)$$

und damit der Beweis erbracht.

1.2 Algebraische Zykel

1.2.1 Verschwindungsordnungen

Es sei A ein eindimensionaler Integritätsring mit Quotientenkörper K.

Dann existiert eine Abbildung

$$\mathrm{ord}_A : K^* \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \mathrm{ord}(f) \tag{1.7}$$

Diese ist folgendermaßen definiert:

Es sei sei $f = a/s$, mit $a, s \in A - \{0\}$, ein beliebiges Element von K^*. Definiere für $a \in A$ die Abbildung $\phi_a : A \to A$ mit $\phi_a(x) = ax$ und setze

$$\mathrm{ord}_A(a) = e_A(\phi_a; A) = \mathrm{len}_A(A/aA) \tag{1.8}$$

Diese Abbildung erfüllt für $a, a' \in A$ die Beziehung

$$\mathrm{ord}_A(aa') = \mathrm{ord}_A(a) + \mathrm{ord}_A(a') \tag{1.9}$$

denn es ist ja $\phi_{aa'} = \phi_a \circ \phi_{a'}$. Weiterhin setze

$$\mathrm{ord}_A(f) = \mathrm{ord}_A(a/s) = \mathrm{ord}_A(a) - \mathrm{ord}_A(s) \tag{1.10}$$

Ist $f = a/s = a'/s'$, so ist $as' = a's$, also auch $\mathrm{ord}_A(a) + \mathrm{ord}_A(s') = \mathrm{ord}_A(a') + \mathrm{ord}_A(s)$. Damit ist auch $\mathrm{ord}_A(a/s) = \mathrm{ord}_A(a'/s')$, also ord_A auf K^* wohldefiniert.

Außerdem gilt:

Proposition 1.2.1. *Für $f, g \in K^*$ ist $\mathrm{ord}_A(fg) = \mathrm{ord}_A(f) + \mathrm{ord}_A(g)$ und $\mathrm{ord}_A(f^{-1}) = -\mathrm{ord}_A(f)$.*

Es sei nun X ein integres Schema und $x \in X$ ein Punkt der Höhe 1. Dann ist $A = \mathcal{O}_{X,x}$ ein eindimensionaler Integritätsring und es existiert damit auch die Abbildung ord_A, die wir auch mit v_x bezeichnen werden:

$$v_{\mathcal{O}_{X,x}} = v_x = \mathrm{ord} : K(X)^* \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto v_x(f) \tag{1.11}$$

Lemma 1.2.1. *Es sei A ein eindimensionaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(A)$. Weiter sei $\phi : M \to M$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten A–Moduls M und $\phi_K : M \otimes_A K \to M \otimes_A K$ der induzierte Endomorphismus. Wenn dann $\det(\phi_K) \neq 0$ ist, so gilt*

$$e_A(\phi, M) = \mathrm{ord}_A(\det(\phi_K)) \tag{1.12}$$

1.2.2 Algebraische Zykel

Es sei X ein algebraisches Schema über dem Grundkörper K. Weiter sei

$$Z_k(X) = \bigoplus_{\substack{V \subseteq X \\ \dim V = k \\ V \,\mathrm{integer}}} \mathbb{Z} =$$

$$= \left\{ \sum_i m_i[V_i] \mid m_i \in \mathbb{Z}, V_i \text{ Untervarietät von } X \text{ mit } \dim V_i = k \right\} \tag{1.13}$$

Definition 1.2.1. *Die Gruppe $Z_k(X)$ ist die Gruppe der k–*Zykel von *X. Es sei $Z_*(X) = \bigoplus_k Z_k(X)$.*

Definition 1.2.2. *Ist X eine Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ dann ist*

$$\mathrm{div}_X(f) = \mathrm{div}(f) = \sum_{\substack{x \in X, \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} v_x(f)\{x\}^- \subseteq Z_{n-1}(X) \tag{1.14}$$

der Divisor von f auf X.

Proposition 1.2.2. *Für X Varietät mit $\dim X = n$ und $f \in K(X)^*$ ist*

$$\mathrm{div}(f^{-1}) = -\,\mathrm{div}(f) \in Z_{n-1}(X). \tag{1.15}$$

Ist X ein algebraisches Schema und $W \subseteq X$ eine $(k+1)$–dimensionale Untervarietät sowie $f \in K(W)^*$, so ist

$$\mathrm{div}(f) = \sum v_{V_i}(f)[V_i] \tag{1.16}$$

eine formale Summe von k-dimensionalen Untervarietäten V_i von W und damit auch von X. Also ist $\mathrm{div}(f) \subseteq Z_k(X)$.

Definition 1.2.3. *Ein Zykel $\alpha \in Z_k(X)$ heißt* rational äquivalent zu 0, *geschrieben $\alpha \sim 0$, wenn ein System $W_1, \dots, W_r \subseteq X$ von Varietäten und rationalen Funktionen $f_i \in K(W_i)^*$ existiert, so daß*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{div}(f_i) \tag{1.17}$$

ist. Wir schreiben

$$\operatorname{Rat}_k(X) = \{\alpha \in Z_k(X) \mid \alpha \sim 0\} \tag{1.18}$$

Proposition 1.2.3. *Die Menge* $\operatorname{Rat}_k(X)$ *ist eine Untergruppe von* $Z_k(X)$*.*

Beweis. Ist $\alpha, \beta \sim 0$ mit $\alpha = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i)$ und $\beta = \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j)$, so ist $-\alpha = \sum \operatorname{div}_{W_i}(f_i^{-1}) \sim 0$ und $\alpha + \beta = \sum_i \operatorname{div}_{W_i}(f_i) + \sum_j \operatorname{div}_{W'_j}(f'_j) \sim 0$.

Definition 1.2.4. *Die Quotientengruppe $Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X)$ ist $A_k(X)$, die Gruppe der k–*Zykelklassen. *Es sei $A_*(X) = \bigoplus_k A_k(X)$*

Proposition 1.2.4. *Es sei X ein Schema und X_{red} sein reduziertes abgeschlossenes Unterschema. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_{red})$ und $A_k(X) = A_k(X_{red})$.*

Proposition 1.2.5. *Es sei $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung von X in disjunkte Komponenten. Dann ist $Z_k(X) = Z_k(X_1) \oplus \dots \oplus Z_k(X_r)$ und $A_k(X) = A_k(X_1) \oplus \dots \oplus A_k(X_r)$.*

Proposition 1.2.6. *Es seien $X_1, X_2 \subseteq X$ abgeschlossenene Unterschemata von einem Schema X. Dann ist die Sequenz*

$$A_k(X_1 \cap X_2) \to A_k(X_1) \oplus A_k(X_2) \to A_k(X_1 \cup X_2) \to 0 \tag{1.19}$$

exakt.

Beweis. Man beachte, daß für jedes irreduzible $Z \subseteq X_1 \cup X_2$ immer $Z \subseteq X_1$ oder $Z \subseteq X_2$ ist.

1.2.3 Eigentlicher push–forward

Definition 1.2.5. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung algebraischer Schemata.*

Dann definiert f eine Abbildung $Z_k(X) \to Z_k(Y)$ gemäß folgender Vorschrift

$$f_*V = \begin{cases} [k(V) : k(W)]W & \textit{für } W = f(V) \textit{ falls } \dim W = \dim V = k \\ 0 & \textit{falls } \dim f(V) \neq \dim V \end{cases} \tag{1.20}$$

für jede irreduzible k–dimensionale Varietät $V \in Z_k(X)$ und entsprechender Erweiterung durch $\mathbb{Z}$–Linearität.

Proposition 1.2.7. *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ eigentliche Abbildungen algebraischer Schemata. Dann ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Beweis. Es sei $V \in Z_k(X)$ eine irreduzible Varietät. Ist $\dim g(f(V)) \neq \dim V$, so ist $\dim f(V) \neq \dim V$ oder $\dim g(f(V)) \neq \dim f(V)$. In allen Fällen ist $(gf)_*(V) = 0$ und $g_* f_* V = 0$. Ist nun $\dim V = \dim f(V) = \dim g(f(V)) = k$, so ist

$$\begin{aligned}(gf)_*(V) &= [k(V) : k(gf(V))]gf(V) = \\ &= [k(V) : k(f(V))] \left([k(f(V)) : k(gf(V))]gf(V)\right) = \\ &= [k(V) : k(f(V))]g_*(f(V)) = g_* \left([k(V) : k(f(V))]f(V)\right) = g_* f_*(V)\end{aligned} \tag{1.21}$$

Proposition 1.2.8. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung algebraische Schemata. Dann ist $f_* \mathrm{Rat}_k(X) \subseteq \mathrm{Rat}_k(Y)$. Also induziert f_* eine Abbildung $f_* : A_k(X) \to A_k(Y)$.*

Diese Behauptung folgt aus zwei Hauptpropositionen. Zunächst die erste Hauptproposition:

Proposition 1.2.9. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche, surjektive Abbildung von l–Varietäten. Weiter sei $\dim X = k+1$ und $\dim Y \leqslant k$, sowie $r \in K(X)^*$. Dann ist*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = 0 \tag{1.22}$$

Lemma 1.2.2. *Es sei $f : X \to l$ eine eigentliche eindimensionale l-Varietät über einem Körper l. Weiter sei $r \in K(X)^*$ eine rationale Funktion auf X. Dann ist mit einer Summe über die abgeschlossenen Punkte $P \in X$:*

$$\operatorname{div}_X(r) = \sum_{P \in X} v_P(r) P = \sum_{P \in X} n_P P \tag{1.23}$$

und es gilt

$$\sum_{P \in X} n_P [k(P) : l] = 0 \tag{1.24}$$

Lemma 1.2.3. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung von l–Varietäten und $\dim X = k+1$ sowie $\dim Y = k$.*

Weiter sei $j : Y' = \mathrm{Spec}\,(K(Y)) \to Y$ die kanonische Abbildung des generischen Punktes, eine flache Abbildung. Man habe das cartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{j'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[j]{} & Y' \end{array} \tag{1.25}$$

Es ist dann X' eine eindimensionale, eigentliche $K(Y)$–Varietät.

Weiterhin induzieren j und j' Abbildungen $j'^* : Z_k(X) \to Z_0(X')$ und $j^* : Z_k(Y) \to Z_0(Y')$, für die gilt

$$f'_* j'^* \alpha = j^* f_* \alpha \tag{1.26}$$

für einen Zykel $\alpha \in Z_k(X)$*. Die Abbildung* $j^* : Z_k(Y) \to Z_0(Y')$ *ist ein Isomorphismus.*

Schließlich ist für ein $r \in K(X)^*$ *und sein Bild* $r' \in K(X')^*$ *unter der kanonischen Abbildung* $K(X) \to K(X')$*:*

$$j'^* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_{X'}(r') \tag{1.27}$$

Beweis. Lokal ist $Y = \operatorname{Spec}(A)$ und $X = \operatorname{Spec}(B)$ mit einer Injektion $f^\sharp : A \to B$. Die Abbildung $X' \to Y'$ wird dann durch die Lokalisierung dieses Morphismus mit $- \otimes_A Q(A)$ erzeugt. Man hat die ebenfalls injektive Abbildung $f'^\sharp : Q(A) \to B \otimes_A Q(A)$ und es ist $B \otimes_A Q(A)$ auch integer, also X' eine Varietät.

Nun zum Beweis von Proposition 1.2.9, der ersten Hauptproposition:
Beweis. Nur der Fall $\dim Y = k = \dim X - 1$ ist nicht trivial: Es sei $\alpha = \operatorname{div}_X(r) \in Z_k(X)$. Dann ist, mit dem cartesischen Quadrat aus dem vorigen Lemma und seinen Abbildungen $j^* f_*(\alpha) = f'_*(\operatorname{div}_{X'}(r')) = 0$ nach dem vorvorigen Lemma. Andererseits ist $j^* : Z_k(Y) \to Z_0(Y')$ injektiv, also $f_*(\alpha) = 0$ wie behauptet.

Damit ist die erste Hauptproposition gezeigt.

Nun zur zweiten Hauptproposition:

Proposition 1.2.10. *Es sei* $f : X \to Y$ *eine eigentliche, surjektive Abbildung von* l*–Varietäten. Weiter sei* $\dim X = \dim Y = k + 1$*. Dann ist* $L = K(X)$ *eine endliche Erweiterung von* $K = K(Y)$ *und für* $r \in K(X)^*$ *gilt*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y \operatorname{Norm}_{[L:K]}(r) \tag{1.28}$$

Definition 1.2.6. *Es sei* $f : X \to Y$ *eine Abbildung von integren Schemata und* $L = K(X)$ *eine endliche Erweiterung von* $K = K(Y)$*. Damit ist die Abbildung*

$$\operatorname{Norm}_{[L:K]} : L \to K$$

definiert. Gilt nun für jedes $r \in L^*$ *sowie* $y \in Y$ *mit* $\operatorname{ht} y = 1$ *und mit den endlich vielen* $x_1, \ldots, x_m \in X$ *mit* $f(x_i) = y$ *und* $\operatorname{ht} x_i = 1$*, daß*

$$\sum_{i=1}^{m} v_{x_i}(r)[k(x_i) : k(y)] = v_y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{1.29}$$

gilt, so sagen wir, daß $f : X \to Y$ die Eigenschaft (Nm) hat.

Proposition 1.2.11. *Es sei* $f : X \to Y$ *eine eigentliche surjektive Abbildung algebraischer Varietäten. die die Eigenschaft* (Nm) *habe.*

Mit $L = K(X)$ *sowie* $K = K(Y)$ *gilt dann:*

$$f_* \operatorname{div}_X(r) = \operatorname{div}_Y(\operatorname{Norm}_{[L:K]}(r))$$

für jedes $r \in L^*$.

Lemma 1.2.4. *Es sei $f : X \to Y$ eine Schemaabbildung und $V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ mit der kanonischen Abbildung $g : V \to Y$ für ein $y \in Y$.*

Weiter sei

$$X' = X \times_Y V$$

und $p : X' \to X$ die kanonische Projektion. Dann gilt

1. *p induziert einen Homöomorphismus $p : X' \to f^{-1}(g(V))$.*
2. *Es ist für $x' \in X'$ und $x \in X$ mit $p(x') = x$ auch $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x'}$.*
3. *Ist X integer, so ist auch X' integer und es ist $K(X) = K(X') = L$. Für ein $r \in L^*$ und x, x' wie oben mit $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$ ist dann auch $v_x(r) = v_{x'}(r)$.*

Lemma 1.2.5. *Es sei $B \supseteq A$ eine endliche Erweiterung von Integritätsringen und $L = Q(B)$, sowie $K = Q(A)$. Weiter sei $(A, \mathfrak{m})$ ein eindimensionaler lokaler Ring und $B_i = B_{\mathfrak{q}_i}$ für die $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Dann ist für jedes $r \in L^*$ die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{m} v_{B_i}(r)[k(B_i) : k(A)] = v_A(\mathrm{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{1.30}$$

erfüllt.

Anders ausgedrückt: Die Abbildung $f : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ hat die Eigenschaft (Nm).

Beweis. Man kann wegen $v(rr') = v(r) + v(r')$ und $\mathrm{Norm}(rr') = \mathrm{Norm}(r)\,\mathrm{Norm}(r')$ stets annehmen, daß $r = b \in B - \{0\}$ ist. Setze $\phi_b : B \to B$ mit $\phi_b(x) = b\,x$. Dann ist

$$e_A(\phi_b; B) = v_A(\det(\phi_b)_K; B \otimes_A K) = v_A(\det(\phi_b)_K; L) = v_A(\mathrm{Norm}_{[L:K]}(b)) \tag{1.31}$$

wegen Lemma 1.2.1

Andererseits ist

$$\begin{aligned} e_A(\phi_b; B) = \mathrm{len}_A(B/bB) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{len}_A(B_i/bB_i) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{len}_{B_i}(B_i/bB_i)[k(B_i) : k(A)] = \sum_{i=1}^{m} v_{B_i}(b)[k(B_i) : k(A)] \end{aligned} \tag{1.32}$$

Die zweite Gleichheit erkennt man aus einer B–Filtrierung $0 \to N_{\nu-1} \to N_\nu \to k(B_{i_\nu}) \to 0$ von B/bB und Lokalisierungen dieser Filtrierung an den $\mathfrak{q}_i$. (Man beachte, daß $\dim B = \dim A = 1$ und $\mathfrak{q}_i$ maximal).

Proposition 1.2.12. *Es sei $f : \tilde{X} \to X$ die kanonische eigentliche Abbildung von der Normalisierung $\tilde{X}$ einer Varietät X nach X. Dann ist f sogar eine endliche Abbildung und es gilt:*

f hat die Eigenschaft (Nm).

Proposition 1.2.13. *Es sei $f : X \to Y$ eine dominante Abbildung von Varietäten. Weiter seien $\tilde{X} \to X$ und $\tilde{Y} \to Y$ die Abbildungen der jeweiligen Normalisierungen. Dann existiert genau eine Abbildung $g : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, so daß*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.33}$$

kommutiert. Ist f eigentlich, so ist auch g eigentlich. Hat g die Eigenschaft (Nm), so hat auch f die Eigenschaft (Nm).

Beweis. Es seien $L = K(X)$ und $K = K(Y)$ und

$$\begin{tikzcd} L & K \arrow[l, "\phi"'] \\ B \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ein Quadrat mit $V = \mathrm{Spec}\,(A) \subseteq Y$ und $U = \mathrm{Spec}\,(B) \subseteq X$ sowie $f(U) \subseteq V$. Weiter seien $\tilde{B}$ und $\tilde{A}$ die Normalisierungen in L und K. Ein $z \in \tilde{A} \subseteq K$ ist ganz über A. Also ist $\phi(z) \in L$ ganz über $\phi(A) \subseteq B$, das heißt $\phi(z) \in \tilde{B}$. Damit erweitert sich $\phi : A \to B$ zu einer Abbildung $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$. Indem diese Abbildungen miteinander verkleben, definieren sie die Abbildung $g : \tilde{X} \to \tilde{Y}$.

Ist f eigentlich, so auch $f \circ p = q \circ g$, da p endlich. Da q separiert, ist dann auch g eigentlich.

Proposition 1.2.14. *Es sei $f : X \to Y$ eine surjektive, endliche, also auch eigentliche, Abbildung von Varietäten X und Y. Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$.*

Dann hat f die Eigenschaft (Nm).

Lemma 1.2.6. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Weiter sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$.*

Es sei $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ für einen Punkt $y \in Y$ der Höhe 1 und es sei

$$V = \mathrm{Spec}\,(A).$$

Weiter sei C der ganze Abschluß von A in L und $X_V = X \times_Y V$.

Dann ist $\dim \mathrm{Spec}\,(C) = 1$ und es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,(C) \arrow[dl] \\ V & \end{tikzcd} \tag{1.34}$$

in dem g ein Isomorphismus ist

Beweis. Die Abbildung von $X_V = f^{-1}(V) \to V$ ist als Basiserweiterung von f eigentlich und $f^{-1}(V)$ ist mit X zusammen auch normal. Ebenso ist V normal, also A diskreter Bewertungsring.

Da $\dim X = \dim Y$, ist L/K algebraisch. Da $C \otimes_A K$ der ganze Abschluß von K in L, also gleich L ist, ist umsomehr $Q(C) = L$.

Ist nun $U = \operatorname{Spec}(B) \subseteq f^{-1}(V)$, so ist jedes $c \in C$ ganz über A, also auch ganz über B und weil B normal, auch Element von B. Also ist $C \subseteq B$. Die einzelnen Abbildungen $\operatorname{Spec}(C \to B)$ für alle möglichen B verkleben zu einer Abbildung $g : X_V \to \operatorname{Spec}(C)$.

Weiter erzeugt jedes Urbild $x_i \in X_V$ von y einen Schnitt $m_{x_i} \cap C = \mathfrak{q}_i \subseteq C$. Da C auch ganzabgeschlossen in $Q(C) = L$ ist, ist $C_{\mathfrak{q}_i} \subseteq \mathcal{O}_{X_V,x_i}$ eine lokale Inklusion von (diskreten) Bewertungsringen. Da Bewertungsringe maximal bezüglich Dominierung sind, ist sogar $C_{\mathfrak{q}_i} = \mathcal{O}_{X_V,x_i}$.

Da $X_V \to V$ und $\operatorname{Spec}(C) \to V$ eigentlich sind, ist es auch g. Damit ist g eine abgeschlossene Abbildung mit Isomorphismen $C_{\mathfrak{p}_{g(x)}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_V,x}$. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß g bijektiv ist.

Betrachte für ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subseteq C$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(L) \arrow[r] \arrow[d] & X_V \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec}(C_{\mathfrak{p}}) \arrow[r, "i"] \arrow[ur, dashed, "h"] & \operatorname{Spec}(C)
\end{tikzcd} \tag{1.35}$$

welches das bewertungstheoretische Kriterium der Eigentlichkeit für die Abbildung g ausdrückt.

Die Fortsetzungen h von i entsprechen genau den Punkten $x \in X_V$ mit $g(x) = i(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})$. Da h immer existiert und eindeutig ist, ist also auch g bijektiv.

Proposition 1.2.15. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche und surjektive Abbildung von normalen Varietäten mit $\dim X = \dim Y$. Es sei $L = K(X)$ und $K = K(Y)$ sowie $r \in L^*$.*

Dann hat $f : X \to Y$ die Eigenschaft (Nm).

Beweis. Es sei wie im vorigen Lemma

$$\begin{tikzcd}
X_V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(C) \arrow[dl] \\
V &
\end{tikzcd} \tag{1.36}$$

mit einem Isomorphismus g.

Daß f die Eigenschaft (Nm) hat, bedeutet

$$\sum_{i=1}^{m} v_{C_{\mathfrak{q}_i}}(r)[k_{C_{\mathfrak{q}_i}}(x_i) : k_A(y)] = v_y(\mathrm{Norm}_{[L:K]}(r)) \tag{1.37}$$

schreiben. Als solche ist diese Gleichung aber nach Lemma 1.2.5 richtig.

Damit ist auch die zweite Hauptproposition nachgewiesen.

1.2.4 Algebraische Zykel von Schemata und Unterschemata

Definition 1.2.7. *Es sei X ein algebraisches Schema und $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ seine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann ist $[X] \in Z_*(X)$ definiert als*

$$[X] = \sum_{i=1}^{r} m_i[X_i] \tag{1.38}$$

wobei $m_i = \operatorname{len} \mathcal{O}_{X,X_i}$ ist. Wir nennen m_i die geometrische Multiplizität *von X_i in X. Gegebenenfalls schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter $Z_*(X) \to A_*(X)$.*

Anmerkung 1.2.1. Ist $X \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, so schreiben wir auch $[X]$ für das Bild von $[X]$ unter der Abbildung $Z_*(X) \to Z_*(Y)$. Ebenso stehe $[X]$ auch für das Bild von $[X]$ in $A_*(Y)$.

Anmerkung 1.2.2. Ist X rein k–dimensional, also $\dim X_i = k$ für alle i, so ist $[X] \in Z_k(X)$ und es ist $A_k(X) = Z_k(X) = \{\sum n_i[X_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$.

Anmerkung 1.2.3. Es sei $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $X = \operatorname{Spec}(A/I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$. Weiter sei $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, also minimale Primideale über I. Dann ist $m_i = \operatorname{len}(A/I)_{\mathfrak{p}_i}$.

1.2.5 Flacher pull–back

Eine flache Abbildung $f : X \to Y$ sei hier stets eine *flache Abbildung der Relativdimension* n, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt.

Beispiele solcher Abbildungen sind:

1. Eine offene Einbettung $U \subseteq X$ (Relativdimension 0)
2. Die Projektion eines Vektorbündels $p : E \to X$ oder eine $\mathbb{A}^n$–Bündels oder eines projektiven Bündels $p : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$.
3. Die Projektion $p : Y \times_k Z \to Y$ für ein algebraisches Schema $Z \to k$ der reinen Dimension n.
4. Ein dominanter Morphismus $f : X \to C$ von einer n–dimensionalen Varietät auf eine nichtsinguläre Kurve C. (Relativdimension $n - 1$).

Definition 1.2.8. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension n. Weiter sei $V \subseteq Y$ eine Untervarietät. Dann sei*

$$f^*(V) = [f^{-1}(V)]. \tag{1.39}$$

Diese Festsetzung dehnt sich $\mathbb{Z}$–linear zu einer Abbildung

$$f^* : Z_k(Y) \to Z_{k+n}(X) \tag{1.40}$$

aus.

Lemma 1.2.7. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus. Dann ist für jedes Unterschema $Z \subseteq Y$*

$$f^*([Z]) = [f^{-1}(Z)]. \tag{1.41}$$

Beweis. Es sei $[Z] = \sum_i m_i[Z_i]$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten mit Multiplizitäten $m_i = \operatorname{len} \mathcal{O}_{Z,Z_i}$. Weiter sei $f^{-1}(Z_i) = \bigcup_j Z'_{ij}$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten $Z'_{ij} \subseteq X$. Wähle nun eine offene Umgebung $V = \operatorname{Spec}(A)$ des generischen Punktes η_i von Z_i und eine offene Umgebung $U = \operatorname{Spec}(B)$ des generischen Punktes ξ_{ij} von Z'_{ij} mit $f(U) \subseteq V$.

Dann wird Z in A durch ein Ideal $I \subseteq A$ repräsentiert und $Z_i \cap V$ ist durch ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$, minimal, gegeben. Weiter wird Z'_{ij} und ξ_{ij} durch ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq B$ gegeben mit $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}B$ minimal. Also ist $\mathfrak{q} \cap A \supseteq \mathfrak{p}$, und aus der going–down–Eigenschaft für B/A folgt dann auch $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Nun ist

$$f^*([Z]) = \sum m_i f^*([Z_i]) = \sum m_i[f^{-1}(Z_i)] = \sum_i m_i \sum_j n_{ij}[Z'_{ij}] \tag{1.42}$$

mit $n_{ij} = \operatorname{len} \mathcal{O}_{f^{-1}(Z_i),Z'_{ij}}$. Es ist mit A und B geschrieben

$$m_i = \operatorname{len}(A/I)_{\mathfrak{p}}$$

und

$$n_{ij} = \operatorname{len}(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}}.$$

Andererseits ist $[f^{-1}(Z)] = \sum n'_l[Z_l]$ mit $n'_l = \operatorname{len} \mathcal{O}_{f^{-1}(Z),Z_l}$. Mit den Ringen A und B ausgedrückt, ist Z_l ein $\mathfrak{q} \subseteq B$, prim, mit $\mathfrak{q} \supseteq IB$ minimal. Es ist dann $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{p}$ ist minimal über I, wieder aufgrund der Going–Down–Eigenschaft von B/A. Die Z_l sind also genau die Z'_{ij}. Wir nennen das zu $Z'_{ij} = Z_l$ gehörige Primideal wieder $\mathfrak{q}$. Man hat

$$n'_l = \operatorname{len}(B/IB)_{\mathfrak{q}}.$$

Wir müssen zeigen, daß

$$n'_l = m_i n_{ij}$$

ist.

Nenne nun $A' = A/I$ und $B' = B/IB$ und bemerke, daß auch $A' \to B'$ als Basiserweiterung von $A \to B$ mit A/I flach ist. Des weiteren sind $A'' = A'_{\mathfrak{p}} = (A/I)_{\mathfrak{p}}$ und $B'' = B'_{\mathfrak{q}} = (B/IB)_{\mathfrak{q}}$ lokale Artinringe und es ist $A'' \to B''$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Artinringe. Die zu zeigende Beziehung, ausgedrückt durch A'' und B'', heißt:

$$(\operatorname{len} A'') \operatorname{len}(B''/\mathfrak{p}B'') = \operatorname{len} B'' \tag{1.43}$$

Dies ist aber die Aussage von Proposition 1.1.2.

Korollar 1.2.1. *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ flache Morphismen mit Relativdimension. Dann ist auch $g \circ f$ ein solcher, und es gilt*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \tag{1.44}$$

Proposition 1.2.16. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.45}$$

ein cartesisches Quadrat mit g flach und f eigentlich. Dann ist g' flach und f' eigentlich und und es gilt

$$f'_* g'^* \alpha = g^* f_* \alpha \tag{1.46}$$

in $Z_* Y'$ für alle $\alpha \in Z_* X$.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} & & W' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & \tilde{Y}' \arrow[dl] \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \\ Y' \arrow[dr] & & \tilde{Y} \arrow[dl] & \\ & Y & & \end{tikzcd} \tag{1.47}$$

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & V \arrow[dl] \arrow[ddd] \\ & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\ & Y' \arrow[r] & Y & \\ W' \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & W \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{1.48}$$

Theorem 1.2.1. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus der relativen Dimension n. Weiter sei $\alpha \in Z_k Y$ mit $\alpha \sim 0$, also rational äquivalent zu Null. Dann ist $f^* \alpha \sim 0$ in $Z_{k+n} X$.*

Korollar 1.2.2. *Die Abbildung $f^* : Z_* Y \to Z_* X$ induziert eine Abbildung $f^* : A_* Y \to A_* X$.*

Lemma 1.2.8. *Es sei X ein rein n–dimensionales Schema mit irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$ und geometrischen Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_r$. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf X, also ein Unterschema, das lokal auf $U \subseteq X$, affin, offen, durch einen Nichtnullteiler $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben ist.*

Es sei $D_i = D \cap X_i$ die Restriktion von D auf X_i. Dann gilt

$$[D] = \sum_{i=1}^{r} m_i [D_i] \tag{1.49}$$

in $Z_{n-1}(X)$.

Beweis. Wir betrachten X lokal als $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ und D als $f \in A$, kein Nullteiler. Weiter seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von A. Dann ist

$$[D] = [A/fA] = \sum_{\substack{\mathfrak{q}_i \supseteq fA \\ \text{minimal}}} [A/\mathfrak{q}_i] \operatorname{len}(A/fA)_{\mathfrak{q}_i} \tag{1.50}$$

Weiter ist $[X] = \sum m_j [X_j]$ mit $m_j = \operatorname{len} A_{\mathfrak{p}_j}$ und es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} m_j \cdot [D_j] = \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} \operatorname{len} A_{\mathfrak{p}_j} \cdot [D_j] = \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A, \\ \text{minimal}}} \operatorname{len} A_{\mathfrak{p}_j} \cdot [A/fA \otimes_A A/\mathfrak{p}_j] = \\ = \sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq A \\ \text{minimal}}} [A/(f, \mathfrak{p}_j)] \cdot \operatorname{len} A_{\mathfrak{p}_j} = \\ = \sum_{\substack{f, \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{q}_{ij} \text{ minimal} \\ \mathfrak{p}_j \text{ minimal}}} [A/\mathfrak{q}_{ij}] \operatorname{len}(A/(f, \mathfrak{p}_j))_{\mathfrak{q}_{ij}} \cdot \operatorname{len}(A_{\mathfrak{p}_j}) \end{aligned} \tag{1.51}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $[A/\mathfrak{q}_i]$ und $[A/\mathfrak{q}_{ij}]$, so muß also für ein festes $\mathfrak{q} \supseteq (f)$, minimal, die Bedingung

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{q} \\ \text{minimal}}} \operatorname{len}(A/(f, \mathfrak{p}_j))_{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{len} A_{\mathfrak{p}_j} = \operatorname{len}(A/fA)_{\mathfrak{q}} \tag{1.52}$$

erfüllt sein. Dies folgt aber aus Lemma 1.1.2 für den eindimensionalen lokalen Ring $A_{\mathfrak{q}}$, $M = A_{\mathfrak{q}}$, das Element $a = f$ und die minimalen Primideale von $A_{\mathfrak{q}}$ die sich unter den $\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{q}}, \ldots, \mathfrak{p}_r A_{\mathfrak{q}}$ finden lassen.

1.2.6 Eine exakte Sequenz

Proposition 1.2.17. *Es sei $i : Y \to X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Unterschemas Y von X. Weiter sei $U = X - Y$ und $j : U \to X$ die entsprechende Inklusion.*

Dann ist die Sequenz

$$A_k Y \xrightarrow{i_*} A_k X \xrightarrow{j^*} A_k U \to 0 \tag{1.53}$$

exakt für alle k.

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & A_kY \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & A_kX \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & A_kU \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & Z_kY \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & Z_kX \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & Z_kU \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Rat}_kY \arrow[u] \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Rat}_kX \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Rat}_kU \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{1.54}$$

wo in der untersten Sequenz die Beziehung $\psi \circ \phi = 0$ offensichtlich gilt.

Die mittlere horizontale Sequenz ist exakt, die Mittelexaktheit ist dabei unmittelbar klar. Weiter wird das Urbild einer Varietät $V \in Z_kU$ durch $\bar{V} \in Z_kX$ gegeben, eine offensichtlich surjektive Abbildung. Damit ist auch $j^* : A_kX \to A_kU$ surjektiv.

Die Beziehung $\operatorname{im} i_* = \ker j^*$ in A_kX folgt aus der Surjektivität von ψ durch eine einfache Diagrammjagd.

Die Surjektivität von ψ ergibt sich aus folgender Überlegung: Es sei (W, f) mit $W \in Z_{k+1}U$, irreduzibel, und $f \in K(W)$ gegeben, mit $\alpha = \mathrm{div}_W(f) \in \mathrm{Rat}_kU$. Dann ist ein Urbild $\beta \in \mathrm{Rat}_kX$ von α unter ψ erzeugt von $(\bar{W}, f)$, was wegen $K(\bar{W}) = K(W)$ wohldefiniert ist. Es ist also $\beta = \mathrm{div}_{\bar{W}}(f)$.

Proposition 1.2.18. *Es sei*

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd} \tag{1.55}$$

ein cartesisches Quadrat von Schemata, wo i eine abgeschlossene Immersion und p eigentlich ist. Weiter induziere p einen Isomorphismus $p' : X' - Y' \to X - Y$.

Dann ist die Sequenz

$$A_kY' \xrightarrow{a} A_kY \oplus A_kX' \xrightarrow{b} A_kX \to 0 \tag{1.56}$$

mit $a(\alpha) = (q_*(\alpha), -i'_*(\alpha))$ und $b(\alpha_1, \alpha_2) = i_*\alpha_1 + p_*\alpha_2$ exakt.

Beweis. Betrachte für alles folgende das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_kY' \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "q_*"'] & A_kX' \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "p_*"] & A_kU' \arrow[r] \arrow[d, "p'_*"] & 0 \\
A_kY \arrow[r, "i_*"] & A_kX \arrow[r, "j^*"] & A_kU \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.57}$$

mit dem Isomorphismus $p' : U' = X' - Y' \to X - Y = U$ und den Inklusionen $j : U \to X$ und $j' : U' \to X'$.

Zunächst ist $b \circ a = 0$, denn es ist

$$b(a(\alpha)) = b(q_*\alpha, -i'_*\alpha) = i_*q_*\alpha - p_*i'_*\alpha = 0$$

wegen $i_*q_* = p_*i'_*$

Weiterhin ist b surjektiv: Es sei $\alpha \in A_kX$ und $\beta' \in A_kU'$ mit $p'_*\beta' = j^*\alpha$, sowie $\beta'' \in A_kX'$ mit $j'^*\beta'' = \beta'$. Dann ist $j^*(\alpha - p_*\beta'') = j^*(\alpha) - p'_*j'^*(\beta'') = 0$. Also ist $\alpha - p_*\beta'' = i_*\alpha'$, also $\alpha = b(\alpha', \beta'')$.

Um nachzuweisen, daß auch $\ker b = \operatorname{im} a$, beginnen wir mit $b(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, also $i_*\alpha_1 + p_*\alpha_2 = 0$. Es ist dann auch $j^*p_*\alpha_2 = -j^*i_*\alpha_1 = 0$ und damit $p'_*j'^*\alpha_2 = 0$, also $j'^*\alpha_2 = 0$ und damit $\alpha_2 = i'_*\beta$ mit $\beta \in A_kY'$. Es folgt dann

$$i_*(\alpha_1 + q_*\beta) = -p_*\alpha_2 + i_*q_*\beta = -p_*\alpha_2 + p_*i'_*\beta = -p_*\alpha_2 + p_*\alpha_2 = 0$$

Wir werden gleich die Identität $\ker i_* = q_*(\ker i'_*)$ zeigen. Aus ihr folgt jedenfalls

$$\alpha_1 + q_*\beta = q_*\beta'$$

mit einem $\beta' \in A_kY'$ und $i'_*\beta' = 0$. Damit ist

$$q_*(\beta' - \beta) = \alpha_1$$

und

$$-i'_*(\beta' - \beta) = i'_*\beta = \alpha_2,$$

also $a(\beta' - \beta) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Es bleibt noch die Identität $\ker i_* = q_* \ker i'_*$. Die Inklusion $q_* \ker i'_* \subseteq \ker i_*$ ist klar. Sei also $\alpha \in A_kY$ mit $i_*\alpha = 0$. Wir ziehen jetzt auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_kY' \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "q_*"'] & Z_kX' \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "p_*"] & Z_kU' \arrow[r] \arrow[d, "p'_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_kY \arrow[r, "i_*"] & Z_kX \arrow[r, "j^*"] & Z_kU \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.58}$$

heran.

Ist $\alpha = [\alpha_0]$ mit $\alpha_0 \in Z_kY$ und $[\alpha_0]$ der zugehörigen Klasse in A_kY, so ist

$$i_*\alpha_0 = \beta_0 \in \mathrm{Rat}_kX.$$

Wir schreiben

$$\beta_0 = \sum_i (W_i) + \sum_j (W'_j).$$

Dabei stehe W_i, W'_j für Elemente von $Z_{k+1}X$ mit rationalen Funktionen $f_i \in K(W_i)$ und $f'_j \in K(W'_j)$. Es sei dann $(W_i) = \mathrm{div}_{W_i}(f_i) \in Z_kX$ und $(W'_j) = \mathrm{div}_{W'_j}(f'_j) \in Z_kX$. Die W_i, W'_j seien so gewählt, daß $W_i \cap U = \emptyset$ und $W'_j \cap U \neq \emptyset$ ist.

Wählen wir nun $W''_j = \overline{p'^{-1}(W'_j \cap U)}$, so induziert die Abbildung p eine eigentliche Surjektion $p : W''_j \to W'_j$, die zugleich ein birationaler Isomorphismus ist. Ordnet man jedem f'_j das entsprechende $f''_j \in K(W''_j)$ zu, so ist wegen $K(W'_j) = K(W''_j)$ und $\mathrm{Norm}_{K(W''_j)|K(W'_j)} = \mathrm{id}$ auch

$$p_*(W''_j) = p_* \mathrm{div}_{W''_j}(f''_j) = \mathrm{div}_{W'_j} \mathrm{Norm}_{K(W''_j)|K(W'_j)}(f''_j) = \mathrm{div}_{W'_j}(f'_j) = (W'_j)$$

Es ist $j^*(\sum_j(W'_j)) = 0$ (wegen $j^*\beta_0 = 0$), also auch

$$p'_* j'^* \sum_j (W''_j) = j^* \sum_j p_*(W''_j) = j^*(\sum_j (W'_j)) = 0,$$

also

$$j'^*(\sum_j (W''_j)) = 0$$

also $i'_*(\gamma_0) = \sum(W''_j)$ für ein $\gamma_0 \in Z_k Y'$.

Weiterhin ist $j^*(\sum_i(W_i)) = 0$, also $\sum_i(W_i) = i_*\alpha'_0$ für ein $\alpha'_0 \in Z_k Y$, das sogar in $\mathrm{Rat}_k Y$ liegt, was durch die Definition der $W_i \subseteq Y$ bewiesen wird. Ersetzen wir α_0 durch $\alpha_0 - \alpha'_0$, so können wir die W_i als nicht existent annehmen, ohne die Klasse $[\alpha_0] = [\alpha_0 - \alpha'_0]$ zu verändern.

Es ist nun

$$i_*(q_*(\gamma_0)) = p_* i'_*(\gamma_0) = p_* \sum_j (W''_j) = \sum_j (W'_j) = i_*\alpha_0$$

also wegen $i_* : Z_k Y \to Z_k X$ injektiv auch $q_*\gamma_0 = \alpha_0$.

Das Element $\gamma = [\gamma_0]$ hat nun die gewünschte Eigenschaft $q_*\gamma = \alpha$ und $i'_*\gamma = 0$ zu ergeben.

1.2.7 Affine Bündel

Ein Schema E zusammen mit einem Morphismus $p : E \to X$ heißt *affines Bündel (vom Rang n)*, wenn es eine offene Überdeckung (U_α) von X mit offenen Mengen gibt, so daß die Abbildungen

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "p"'] & U_\alpha \times \mathbb{A}^n \arrow[dl] \\ U_\alpha & \end{tikzcd} \tag{1.59}$$

kommutieren und alle g_α Isomorphismen sind.

Proposition 1.2.19. *Es sei $p : E \to X$ ein affines Bündel vom Rang n und X ein noethersches Schema. Dann ist der flache pull-back*

$$p^* : A_k X \to A_{k+n} E \tag{1.60}$$

surjektiv für alle k.

Beweis Betrachte zunächst für $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $U = X - Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_{k+n}E|_Y \arrow[r] & A_{k+n}E \arrow[r] & A_{k+n}E|_U \arrow[r] & 0 \\ A_k Y \arrow[r] \arrow[u, "p|_Y{}^*"] & A_k X \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & A_k U \arrow[r] \arrow[u, "p|_U{}^*"] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.61}$$

Wenn $p|_Y{}^*$ und $p|_U{}^*$ surjektiv sind, ist es auch p^*. Damit kann man, mittels noetherscher Induktion, X immer weiter in Y und U aufspalten, und so letztlich $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, affines Schema, und $E = \mathbb{A}^n_X$, triviales Bündel, annehmen.

Indem man nun die Beziehung $\mathbb{A}^n_X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^{n-1}_X}$ ausnutzt, kann man sich sogar auf $E = \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A[t])$ beschränken.

Es sei nun $V \in Z_{k+1}X[t]$. Dann liegt V in der Faser $X[t]_W$ für ein $W \in Z_*X$. Ist dieses $W = \mathfrak{p} \in Z_kX$, so ist V das untere, das generische, Primelement $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[t] = p^*W$ in der Faser $X[t]_W = X[t]_\mathfrak{p} = \mathrm{Spec}\,(k(\mathfrak{p})[t])$. Damit ist V als p^*W, also als Element von p^*A_kX nachgewiesen.

Ist V aber ein oberes, also abgeschlossenes, Primelement in der Faser $X[t]_W$, so ist das generische Primelement der Faser $V' \supseteq V$ mit $V' \in Z_{k+2}X[t]$ und es ist $V' = p^*W = W[t]$ für ein $W \in Z_{k+1}X$. Nun ist aber $A_{k+1}V' = A^1(V') = \mathrm{Cl}(W[t]) = \mathrm{Cl}(W) = A^1(W) = A_kW$, wobei $\mathrm{Cl}(W[t])$ und $\mathrm{Cl}(W)$ für die Weildivisorklassen sowie $A^1(V')$ und $A^1(W)$ als Bezeichnung der 1-kodimensionalen Zykelklassen stehe. Also ist $[V] \in A_{k+1}V'$ schon durch ein Element $\sum_i n_i[W_i']$ von A_kW mit $W_i' \in Z_kW$ gegeben, für das die rationale Äquivalenz $\sum_i n_i p^*W_i' \sim V$ in $Z_{k+1}V'$, also auch in $Z_{k+1}X[t]$, gilt.

2

Divisoren

2.1 Weildivisoren und Cartierdivisoren

Es sei X ein Schema und $\mathbf{OuvAff}(X)$ die Kategorie der affinen offenen Teilmengen $U = \operatorname{Spec}(A)$ von X mit den durch die Abbildungen $A \to A_f$ induzierten offenen Immersionen als Morphismen.

Weiter sei für jeden Ring A die multiplikativ abgeschlossene Menge S_A gleich der Menge der Nichtnullteiler von A, also der $f \in A$ mit $0 \to A \xrightarrow{\cdot f} A$ injektiv. Wir nennen dann $Q(A) = S_A^{-1}A$ den *Funktionenkörper* von A. Es gibt kanonische Abbildungen $Q(A) \to Q(A_g)$ für jedes $g \in A$.

Die Zuordnung $\mathcal{K}(U) = Q(\mathcal{O}_X(U))$ für jedes $U \subseteq X$, offen, affin, definiert also eine Prägarbe $\mathcal{K}_X$ auf $\mathbf{OuvAff}(X)$, deren Garbifizierung eine Garbe auf X ist, die wir ebenfalls mit $\mathcal{K}_X$ bezeichnen.

Es seien $\mathcal{O}_X^*(U)$ und $\mathcal{K}_X^*(U)$ die multiplikativen Gruppen, der von 0 verschiedenen Elemente von $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{K}_X(U)$. Diese definieren eine exakte Sequenz von multiplikativen abelschen Garben

$$1 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{D} \to 1 \tag{2.1}$$

Definition 2.1.1. *Es sei X ein Schema. Dann ist $\Gamma(X, \mathcal{D}) = \operatorname{CaDiv} X$ die (abelsche) Gruppe der* Cartier–Divisoren von X.

Ein Cartier–Divisor D kann also als Familie (f_i, U_i) mit einer offenen Überdeckung $\bigcup_i U_i = X$ und $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$ angesehen werden, für die $g_{ij} = f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*(U_{ij})$ ist, mit $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Die Summe zweier Cartierdivisoren $D = (f_i, U_i)$ und $D' = (f_i', U_i)$ ist $D + D' = (f_i f_i', U_i)$, der inverse Cartierdivisor $-D$ ist (f_i^{-1}, U_i).

Definition 2.1.2. *Es sei X ein Schema. Ein Cartier–Divisor der Form (f, X) mit $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$ heißt* Hauptdivisor, *geschrieben* $\operatorname{div}(f) = (f)$.

Proposition 2.1.1. *Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe* $\operatorname{CaDiv}^h X \subseteq \operatorname{CaDiv} X$.

Definition 2.1.3. *Sind $D, D' \in \operatorname{CaDiv} X$ und ist $D - D'$ ein Hauptdivisor, so heißen D, D'* linear äquivalent*.*

Definition 2.1.4. *Die Quotientengruppe*

$$\operatorname{CaCl} X = \operatorname{CaDiv} X / \operatorname{CaDiv}^h X \tag{2.2}$$

ist die Gruppe der Cartierdivisorenklassen auf *X.*

Definition 2.1.5. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartier–Divisor auf X. Weiter sei $V \subseteq X$ eine 1–kodimensionale Untervarietät von X. Dann ist*

$$v_V(D) = v_{\mathcal{O}_{X,V}}(f_i) \tag{2.3}$$

für ein i mit $U_i \cap V \neq \emptyset$. Da $f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}^*_{U_{ij}}(U_{ij})$ ist die Definition von dem gewählten i unabhängig.

Definition 2.1.6. *Es sei X eine Varietät mit* $\dim X = n$*. Dann ist*

$$\operatorname{Div} X = Z_{n-1}(X) \tag{2.4}$$

die Gruppe der Weildivisoren von *X und*

$$\operatorname{Cl} X = A_{n-1}(X) = Z_{n-1}(X) / \operatorname{Rat}_{n-1}(X) \tag{2.5}$$

die Gruppe der Weildivisorenklassen von *X.*

Definition 2.1.7. *Es sei X eine Varietät mit* $\dim X = n$ *und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor auf X. Dann ist*

$$[D] = \sum_V v_V(D)\, V \ \in \operatorname{Div} X = Z_{n-1}(X) \tag{2.6}$$

wobei V durch die 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, der zu *D* assoziierte Weil–Divisor*.*

Proposition 2.1.2. *Es sei X eine Varietät mit* $\dim X = n$*. Dann definiert $D \mapsto [D]$ einen Gruppenhomomorphismus*

$$\operatorname{CaDiv} X \to \operatorname{Div} X \tag{2.7}$$

von den Cartierdivisoren in die Weildivisoren.

Dabei wird $\operatorname{CaDiv}^h X$ *nach* $\operatorname{Rat}_{n-1}(X)$ *abgebildet, denn es ist*

$$[\operatorname{div}(f)] = \operatorname{div}_X(f) \tag{2.8}$$

mit dem weiter oben eingeführten $\operatorname{div}_X(f) \in \operatorname{Rat}_{n-1}(X) \subseteq Z_{n-1}(X)$*. Man hat also auch eine induzierte Abbildung*

$$\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Cl} X \tag{2.9}$$

Definition 2.1.8. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i) \in \operatorname{CaDiv} X$ ein Cartierdivisor auf X. Dann ist*

$$|D| = \operatorname{supp} D = \bigcup_{\substack{V \subseteq X \\ V \text{ Varietät} \\ f_V \notin \mathcal{O}^*_{X,V}}} V \qquad \text{wobei } f_V = f_i \text{ mit } U_i \cap V \neq \emptyset \tag{2.10}$$

der Support von D in X. *Die Definition ist wegen $f_i^{-1} f_j \in \mathcal{O}^*_{U_{ij}}(U_{ij})$ unabhängig von der Wahl des jeweiligen i für V.*

Anmerkung 2.1.1. Auf $U = X - |D|$ ist $\mathcal{O}_X(D)|_U \cong \mathcal{O}_U$. Damit existiert ein der $1 \in \mathcal{O}_U$ entsprechender trivialisierender Schnitt $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(U)$.

Anmerkung 2.1.2. Wir können den zu einem Cartierdivisor D assoziierten Weildivisor $[D]$ auch schreiben als

$$[D] = \sum_V v_V(D)\, V \tag{2.11}$$

wobei V jetzt nicht durch alle 1-kodimensionalen Varietäten $V \subseteq X$ läuft, sondern nur durch diejenigen mit $V \subseteq |D|$. Damit erkennen wir $[D] \in Z_{n-1}(|D|)$.

Neben der Zuordnung eines Weildivisors zu jedem Cartierdivisor auf einer Varietät X können wir auf einem beliebigen Schema X einem Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ ein Linienbündel $\mathcal{O}_X(D)$ zuordnen.

Definition 2.1.9. *Es sei X ein Schema und $D = (f_i, U_i)$ aus* $\operatorname{CaDiv} X$. *Dann ist $\mathcal{O}_X(D)$ mit*

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1} \mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i} \tag{2.12}$$

ein Linienbündel zusammen mit einer Inklusion $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$.

Anmerkung 2.1.3. Wir schreiben auch manchmal $L(D)$ für $\mathcal{O}_X(D)$.

Es seien L, L_1, L_2 Linienbündel auf einem Schema X. Dann ist auch $L^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ und $L_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} L_2$ ein Linienbündel auf X. Die erste Abbildung definiert dabei ein Inverses für die Multiplikation, die durch die zweite Abbildung gegeben wird. Dabei ist $\mathcal{O}_X$, als Linienbündel aufgefaßt, das neutrale Element.

Definition 2.1.10. *Wir bezeichnen die Gruppe der Linienbündel auf einem Schema X mit $\mathbf{L}(X)$ und die Gruppe der Isomorphieklassen von Linienbündeln mit* $\operatorname{Pic} X$.

Proposition 2.1.3. *Für ein Schema X ist* $\operatorname{Pic} X = H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$.

Für einen Cartierdivisor $D = (f_i, U_i)$ gibt es ein kanonisch zugeordnetes Element $c(D) \in H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$. Dieses wird durch $U_{i_0 i_1} \mapsto f_{i_0}^{-1} f_{i_1}$ als Element von $\check{H}^1((U_i), \mathcal{O}^*_X)$ gegeben.

Proposition 2.1.4. *Es sei X ein beliebiges Schema. Die Abbildung $D \to \mathcal{O}_X(D)$ definiert einen Gruppenhomomorphismus* $\operatorname{CaDiv} X \to \mathbf{L}(X)$*. Es ist also*

$$\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D') = \mathcal{O}_X(D + D') \tag{2.13}$$

$$\mathcal{O}_X(-D) = \mathcal{O}_X(D)^{-1} \tag{2.14}$$

Proposition 2.1.5. *Es sei X ein Schema, D ein Cartierdivisor und $\mathcal{O}_X(D)$ das zugeordnete Linienbündel. Dann ist äquivalent*

a) Es ist $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$.
b) Es ist $D \in \operatorname{CaDiv}^h X$, ein Hauptdivisor.

Es ist also $c(D) = 0 \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ genau für die Hauptdivisoren $D \in \operatorname{CaDiv}^h X$. Damit ist $D \to c(D)$ eine wohldefinierte und injektive Abbildung $\operatorname{CaCl} X \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Weiterhin ergeben die beiden vorangehenden Propositionen eine injektive Abbildung $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$.

Proposition 2.1.6. *Wir haben ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{CaCl} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \operatorname{Pic} X \arrow[dl, "\gamma"] \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

Dabei sind die Abbildungen α, β, γ die oben eingeführten, insbesondere ist $\alpha(D) = c(D)$. Die Abbildungen α und β sind injektiv, die Abbildung γ ist, wie oben bemerkt, ein Isomorphismus.

Proposition 2.1.7. *Ist X eine Varietät, so ist* $\operatorname{CaCl} X \to \operatorname{Pic} X$ *auch surjektiv, also ein Isomorphismus.*

Dies folgt, da für eine Varietät X die Garbe $\mathcal{K}_X$ welk ist, aus der exakten Sequenz $0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{D} \to 0$ und der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz.

Definition 2.1.11. *Es sei X ein beliebiges Schema und $D = (f_i, U_i)$ ein Cartierdivisor. Weiter sei $\mathcal{O}_X(D)$ das assoziierte Linienbündel $(f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i})$. Es sei $Z = |D|$ der Support von D und $U = X - Z$, sowie $U_i' = U_i \cap U$. Es ist dann $f_i|_{U_i'} \in \mathcal{O}_X^*(U_i')$, also $1 \in f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i'} \subseteq \mathcal{K}_X(U_i')$.*

Die einzelnen $1 = 1_{U_i'}$ verkleben zu einem Schnitt $1 \in \mathcal{O}_X(D)(U) \subseteq \mathcal{K}_X(U)$. Diesen nennen wir auch s_D.

2.1.1 Pseudodivisoren

Definition 2.1.12. *Es sei X ein Schema und (L, Z, s) ein Tripel bestehend aus einem Linienbündel L auf X, einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subseteq X$ und einem nirgends verschwindenden Schnitt $s \in L(X - Z)$.*

Dann heißt (L, Z, s) Pseudodivisor *auf X. Es heißen L das* Linienbündel*, Z* der Support *und s* der Schnitt *des Pseudodivisors.*

Definition 2.1.13. *Zwei Pseudodivisoren* (L, Z, s) *und* (L', Z', s') *auf einem Schema* X *heißen* äquivalent, *wenn* $Z = Z'$ *ist und ein* $\mathcal{O}_X$*-Isomorphismus* $\sigma : L \to L'$ *existiert, so daß* $\sigma_{X-Z}(s) = s'$ *ist.*

Definition 2.1.14. *Es sei* D *ein Cartier–Divisor auf einem Schema* X*. Weiter sei* $\mathcal{O}_X(D)$ *sein zugehöriges Linienbündel,* $|D|$ *sein Support und* $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(X - |D|)$ *sein assoziierter trivialisierender Schnitt.*

Dann ist $(\mathcal{O}_X(D), |D|, s_D)$ der zu D gehörige Pseudodivisor.

Definition 2.1.15. *Ein Pseudodivisor* (L, Z, s) wird von einem Cartier–Divisor D repräsentiert, *falls*

i) $|D| \subseteq Z$ *gilt.*
ii) Ein Isomorphismus $\sigma : \mathcal{O}_X(D) \to L$ *existiert, der auf* $X - Z$ *den Schnitt* s_D *in* s *überführt.*

Proposition 2.1.8. *Es sei* X *eine Varietät und* (L, Z, s) *ein Pseudodivisor auf* X*. Dann wird* (L, Z, s) *durch einen Cartier–Divisor* $D \in \mathrm{CaDiv}\, X$ *repräsentiert.*

Es gilt

1. *Ist* $Z \neq X$*, so ist* D *als Element von* $\mathrm{CaDiv}\, X$ *eindeutig bestimmt.*
2. *Ist* $Z = X$*, so ist* D *als Element von* $\mathrm{CaCl}\, X$*, also als Divisorenklasse eindeutig bestimmt.*

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung, da durch sie später für eine k–Untervarietät $j : V \subseteq X$ eines beliebigen Schemas X und einen Pseudodivisor D auf X, der Schnitt $D \cdot [V] = [j^* D] \in A_{k-1}(|D| \cap V)$ eingeführt werden wird.

Definition 2.1.16. *Es sei* D *ein Pseudodivisor auf einer* n*–dimensionalen Varietät* X *mit Support* $Z = |D|$*.*

Dann definiert man die zugehörige Weildivisorenklasse

$$[D] \in A_{n-1}(|D|) \tag{2.16}$$

wie folgt:

Es sei $\tilde{D}$ *ein Cartierdivisor auf* X*, der* D *repräsentiert.*

1. *Ist* $Z \neq X$*, so ist* $\tilde{D}$ *als Element von* $\mathrm{CaDiv}\, X$ *eindeutig bestimmt. Wir setzen dann*
$$[D] = [\widetilde{D}] \tag{2.17}$$
Dabei ist $[\widetilde{D}]$ *der zu* $\widetilde{D}$ *assoziierte Weildivisor aufgefaßt als Zykel in* $Z_{n-1}(|\widetilde{D}|)$*, also*
$$[\widetilde{D}] = \sum_V \mathrm{ord}_V(\widetilde{D})[V] \in Z_{n-1}(|\widetilde{D}|) = A_{n-1}(|\widetilde{D}|)$$
wobei über die irreduziblen Komponenten V *von* $|\tilde{D}|$ *summiert wird.*
Da $|\widetilde{D}| \subseteq |D| = Z$ *erhalten wir ein Bild in* $Z_{n-1}(|D|) = A_{n-1}(|D|)$

2. Ist $Z = X$, so ist $\widetilde{D}$ als Element von $\mathrm{CaCl}\, X$ *eindeutig bestimmt, also für einen repräsentierenden Divisor $\widetilde{D}$ ist $[\widetilde{D}] \in Z_{n-1}(X)$ bis auf Elemente von* $\mathrm{Rat}_{n-1}(X)$ *eindeutig bestimmt. Damit ist $[\widetilde{D}]$ in $A_{n-1}(X) = A_{n-1}(|D|)$ eindeutig festgelegt.*

Definition 2.1.17. *Es seien $D = (L, Z, s)$ und $D' = (L', Z', s')$ zwei Pseudodivisoren auf einem Schema X.*

Dann sei

$$D + D' = (L \otimes_{\mathcal{O}_X} L', Z \cup Z', s \otimes s') \tag{2.18}$$

$$-D = (L^{-1}, Z, s^{-1}) \tag{2.19}$$

Proposition 2.1.9. *Für ein festes $Z \subseteq X$ bilden die Pseudodivisoren D mit* $\operatorname{supp} D = Z$ *eine abelsche Gruppe.*

Definition 2.1.18. *Es sei $f : X' \to X$ ein Schemamorphismus und $D = (L, Z, s)$ ein Pseudodivisor auf X. Dann ist $f^*D = (f^*L, f^{-1}(Z), f^*(s))$ der* pull–back von D auf X'.

Proposition 2.1.10. *Für $g : X'' \to X'$ und $f : X' \to X$ sowie einen Pseudodivisor D auf X gilt*

$$g^* f^*(D) = (f \circ g)^*(D) \tag{2.20}$$

Weiterhin gilt für Pseudodivisoren D, D' auf X, daß

$$f^*(D + D') = f^*D + f^*D' \tag{2.21}$$

mit der oben eingeführten Addition von Pseudodivisoren.

2.1.2 Schnitte mit Divisoren

Definition 2.1.19. *Es sei D ein Pseudodivisor auf einem Schema X und V eine k–dimensionale Untervarietät von X mit Einbettung $j : V \to X$. Dann ist j^*D ein Pseudodivisor auf V mit $|j^*D| = V \cap |D|$.*

Dann sei

$$D \cdot [V] = D \cdot V = [j^*D] \in A_{k-1}(V \cap |D|) \tag{2.22}$$

Anmerkung 2.1.4. Ist D ein Cartier–Divisor auf X, so kann man $D \cdot [V]$ auch folgendermaßen konstruieren: Ist $|D| \not\supseteq V$, so ist j^*D ein Cartierdivisor auf V. Man bilde den zu j^*D assoziierten Weildivisor in $Z_{k-1}(|D| \cap V)$ und nenne sein Bild in $A_{k-1}(|D| \cap V)$ dann $D \cdot [V]$.

Ist $|D| \supseteq V$, so wähle einen Cartier–Divisor C auf V, so daß $\mathcal{O}_V(C) \cong j^*\mathcal{O}_X(D)$ ist. Dann sei $D \cdot [V]$ das Bild des zu C assoziierten Weildivisors $[C]$ aus $Z_{k-1}(V)$ in $A_{k-1}(V)$. Der Divisor C ist nur bis auf einen Hauptdivisor bestimmt, aber sein Bild in $A_{k-1}(V)$ ist eindeutig.

Anmerkung 2.1.5. Wir nennen $D \cdot [V]$ auch das Bild von $D \cdot [V]$ in jedem $A_{k-1}(Y)$ für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $V \cap |D| \subseteq Y$.

Anmerkung 2.1.6. Ist für ein Schema X das Linienbündel $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial, so kann man sogar eine Abbildung $Z_k(X) \to Z_{k-1}(|D|)$ konstruieren. Man setze für $j : V \to X$ dann $D \cdot V = [j^* D]$ falls $V \not\subseteq |D|$ und $D \cdot V = 0$, falls $V \subseteq |D|$. Im letzteren Fall würde die explizite Konstruktion von oben die Wahl eines Cartier–Divisors C auf V verlangen, für den $\mathcal{O}_V(C) = j^* \mathcal{O}_X(D)$ ist. Da $j^* \mathcal{O}_X(D)$ wegen $j(V) \subseteq |D|$ und der Annahme vom Anfang trivial ist, muß auch $\mathcal{O}_V(C) = \mathcal{O}_V$ sein. Es ist dann sinnvoll $D \cdot V = 0$ zu setzen.

Der Fall $\mathcal{O}_X(D)$ auf $|D|$ trivial tritt zum Beispiel für (global) prinzipale Cartierdivisoren D auf, diese werden unter der kanonische Abbildung $\operatorname{CaDiv} X \to \operatorname{Pic} X$ auf die Isomorphieklasse des trivialen Bündels $\mathcal{O}_X$ abgebildet.

Definition 2.1.20. *Es sei* $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ *ein algebraischer Zykel im Schema* X*. Dann ist* $|\alpha| = \bigcup_{n_V \neq 0} V$*, der* Support *von* α*.*

Definition 2.1.21. *Ist* $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ *ein algebraischer Zykel, so definieren wir*

$$D \cdot \alpha = \sum_V n_V \, (D \cdot [V]) \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \tag{2.23}$$

Anmerkung 2.1.7. Für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ mit $|D| \cap |\alpha| \subseteq Y \subseteq X$ sei $D \cdot \alpha$ auch das Bild von $D \cdot \alpha \in A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|)$ unter $A_{k-1}(|D| \cap |\alpha|) \to A_{k-1}(Y)$.

Proposition 2.1.11. *a) Es sei* D *ein Pseudodivisor auf* X *und* $\alpha, \alpha' \in Z_k(X)$*. Dann ist*

$$D \cdot (\alpha + \alpha') = D \cdot \alpha + D \cdot \alpha' \tag{2.24}$$

in $A_{k-1}(|D| \cap (|\alpha| \cup |\alpha'|))$*.*

b) Es seien D, D' *Pseudodivisoren auf* X *und* $\alpha \in Z_k(X)$*. Dann ist*

$$(D + D') \cdot \alpha = D \cdot \alpha + D' \cdot \alpha \tag{2.25}$$

in $A_{k-1}((|D| \cup |D'|) \cap |\alpha|)$

c) Es sei D *ein Pseudodivisor auf* X *und* $f : X' \to X$ *ein eigentlicher Schemamorphismus,* $\alpha \in Z_k(X')$ *und* $g : f^{-1}(|D|) \cap |\alpha| \to |D| \cap f(|\alpha|)$*.*
Dann ist

$$g_*(f^* D \cdot \alpha) = D \cdot f_* \alpha \tag{2.26}$$

in $A_{k-1}(|D| \cap f(|\alpha|))$*.*

d) Es sei D *ein Pseudodivisor auf* X *und* $f : X' \to X$ *ein flacher Schemamorphismus mit Relativdimension* n*. Weiter sei* $\alpha \in Z_k(X)$ *und* $g : f^{-1}(|D| \cap |\alpha|) \to |D| \cap |\alpha|$*.*
Dann ist:

$$f^*(D) \cdot f^* \alpha = g^*(D \cdot \alpha) \tag{2.27}$$

in $A_{k+n-1}(f^{-1}(|D|) \cap |\alpha|))$*.*

e) Ist D ein Pseudodivisor auf X mit trivialem Linienbündel L_D auf X und $\alpha \in Z_k(X)$, dann ist

$$D \cdot \alpha = 0 \tag{2.28}$$

in $A_{k-1}(|\alpha|)$.

Wir betrachten für die beiden folgenden Lemmata cartesische Quadrate

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "j"] \end{tikzcd} \tag{2.29}$$

mit offenen Immersionen j, j'.

Lemma 2.1.1. *Es sei $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D, Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(X')$:*

$$f'_*(f'^* D \cdot \alpha) = D \cdot f'_* \alpha \tag{2.30}$$

Dann gilt die Aussage c) der vorigen Proposition für $f : X \to Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j^*(f_*(f^* D \cdot \alpha)) &= f'_* j'^*(f^* D \cdot \alpha) = f'_*(j'^* f^* D \cdot j'^* \alpha) = \\ &= f'_*(f'^* j^* D \cdot j'^* \alpha) = j^* D \cdot f'_* j'^* \alpha = j^* D \cdot j^* f_* \alpha = j^*(D \cdot f_* \alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \to Y'$ eine Überdeckung von $f : X \to Y$ darstellen, gilt die Aussage c) für f unter der Annahme, daß sie für alle f' glt.

Lemma 2.1.2. *Es sei $f : X \to Y$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und es existiere ein überdeckendes System von cartesischen Quadraten wie oben. Weiter sei für jedes von diesen und für jedes D, Pseudodivisor auf Y' und $\alpha \in Z_k(Y')$:*

$$f'^* D \cdot f'^* \alpha = f'^*(D \cdot \alpha) \tag{2.31}$$

Dann gilt die Aussage d) der vorigen Proposition für $f : X \to Y$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} j'^*(f^* D \cdot f^* \alpha) &= j'^* f^* D \cdot j'^* f^* \alpha = f'^* j^* D \cdot f'^* j^* \alpha = \\ &= f'^*(j^* D \cdot j^* \alpha) = f'^* j^*(D \cdot \alpha) = j'^* f^*(D \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Da die $f' : X' \to Y'$ eine Überdeckung von $f : X \to Y$ darstellen, gilt die Aussage d), falls sie für alle f' gilt.

Lemma 2.1.3. *Es sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf Y. Dann ist*

$$[f^* D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] \tag{2.32}$$

Beweis. Man habe das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & U \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & V \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

mit $V = \mathrm{Spec}\,(A)$ und $U = \mathrm{Spec}\,(B)$, offen. Es sei D auf V gegeben als (a) mit einem Nichtnullteiler $a \in A$. Dann ist auch $f^*D|_U = (a)$ mit a aufgefaßt als Element von B. Wegen $0 \to A \xrightarrow{\cdot a} A$ und der exakten Tensorierung $- \otimes_A B$ ist a auch in B Nichtnullteiler. Es ist also

$$[f'^*D] = [\mathrm{Spec}\,(B/aB)] = [\mathrm{Spec}\,(B \otimes A/a)] = [f'^{-1}D] = f'^*[D]$$

Man nehme nun im folgenden an, daß die Aussage des Lemmas für f eine offene Inklusion schon richtig sei.

Damit ist dann

$$\begin{aligned} j'^*[f^*D] = [j'^*f^*D] = [f'^*j^*D] = f'^*[j^*D] = f'^*[j^{-1}D] = f'^*j^*[D] = \\ = j'^*f^*[D] = j'^*[f^{-1}D] \end{aligned}$$

Da U, V allgemein gewählt waren, folgt $[f^*D] = [f^{-1}D] = f^*[D]$.

Lemma 2.1.4. *Es sei $f : X \to V$ ein flacher Morphismus mit Relativdimension n und V eine Varietät. Weiter sei D ein effektiver Cartierdivisor auf V und es sei*

$$[X] = \sum_i l_i[X_i]$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, notwendig gleicher Dimension $\dim V + n$. *Dann ist*

$$f^*D \cdot f^*[V] = [f^*D] = [f^{-1}D] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \qquad (2.33)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} f^*D \cdot f^*[V] = f^*D \cdot [X] = f^*D \cdot (\sum_i l_i[X_i]) = \\ = \sum_i l_i(f^*D \cdot [X_i]) = \sum_i l_i[f^*D \cap X_i] = \\ = [f^*D \cap X] = [f^*D] = [f^{-1}(D)] = f^*[D] = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

Nun schließlich zum Beweis von d):

Beweis. Man habe im allgemeinen Fall das cartesische Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & f^{-1}(V) \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & V \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

wobei man durch weitere Lokalisierung und Ausnutzen der Additivität in D annehmen kann, daß D auf Y ein effektiver Cartierdivisor ist. Dann gilt mit $\tilde{D} = j^*D$:

$$\begin{aligned} f^*(D) \cdot f^*[V] &= f^*(D) \cdot f^* j_*[V] = f^*(D) \cdot j'_* f'^*[V] = \\ &= j'_*(j'^* f^*(D) \cdot f'^*[V]) = j'_*(f'^* j^*(D) \cdot f'^*[V]) = \\ &= j'_*(f'^* \tilde{D} \cdot f'^*[V]) = j'_* f'^*(\tilde{D} \cdot [V]) = \\ &= f^* j_*(j^* D \cdot [V]) = f^*(D \cdot j_*[V]) = f^*(D \cdot [V]) \end{aligned}$$

2.2 Kommutativität der Schnittklassen

2.3 Chern–Klasse eines Linienbündels

2.4 Gysin–Abbildung für Divisoren

3

Chern–Klassen von Vektorbündeln

3.1 Segre–Klassen

Es sei X ein algebraisches Schema und E ein Vektorbündel auf X vom Rang $e+1$. Weiter sei $\mathbb{P}(E)$ das projektive Bündel über X mit der Abbildung $p : \mathbb{P}(E) \to X$. Wir kürzen ab: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(d)$.

Definition 3.1.1. *Mit den Bezeichnungen von oben ist eine Abbildung*

$$s_i(E) : A_k(X) \to A_{k-i}(X), \quad \alpha \mapsto s_i(E) \cap \alpha \tag{3.1}$$

durch

$$s_i(E) \cap \alpha = p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) \tag{3.2}$$

*Wir nennen E die i-*te Segre–Klasse *von E.*

Es sei jetzt $f : X' \to X$ eine Abbildung von algebraischen Schemata und es bestehe das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(f^*E) & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} \tag{3.3}$$

Wir kürzen wieder ab $\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E)}(d)$ und bemerken $f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d)$.

Es gelten dann folgende Beziehungen

Proposition 3.1.1 (eigentliche Projektion). *Es sei mit den eben eingeführten Bezeichnungen $f : X' \to X$ eine eigentliche Abbildung und $\alpha \in A_*(X')$. Dann gilt:*

$$f_*(s_i(f^*E) \cap \alpha) = s_i(E) \cap f_*\alpha \tag{3.4}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f_*(s_i(f^*E) \cap \alpha) = f_* p'_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha) = \\
f_* p'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha) = \\
p_* f'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p'^*\alpha)) = \\
p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap f'_* p'^*\alpha) = \\
p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^* f_*\alpha) = s_i(E) \cap f_*\alpha
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Proposition 3.1.2 (flacher Pullback). *Es sei mit den obigen Bezeichnungen $f : X' \to X$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und $\alpha \in A_*(X)$. Dann gilt:*

$$f^*(s_i(E) \cap \alpha) = s_i(f^*E) \cap f^*\alpha \tag{3.6}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f^*(s_i(E) \cap \alpha) = f^* p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) = \\
p'_* f'^*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) = \\
p'_*(c_1(f'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))^{e+i} \cap f'^* p^*\alpha) = \\
p'_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1))^{e+i} \cap p'^* f^*\alpha) = s_i(f^*E) \cap f^*\alpha
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Proposition 3.1.3. *Es sei $X, E, \alpha \in A_*(X)$ wie oben. Dann ist*

$$s_i(E) \cap \alpha = 0, \text{ für } i < 0 \tag{3.8}$$

$$s_0(E) \cap \alpha = \alpha \tag{3.9}$$

Proposition 3.1.4. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E, F Vektorbündel auf X vom Rang $e + 1$ und $f + 1$. Dann ist*

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha) \tag{3.10}$$

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathbb{P}} \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "s"] & \\
\mathbb{P}(E) \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{P}(F) \arrow[dl, "q"] \\
 & X &
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) = p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap p^* q_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap q^*\alpha)) = \\
p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap r_* s^*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap q^*\alpha)) = \\
p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap r_*(c_1(s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap s^* q^*\alpha)) = \\
p_* r_*(c_1(r^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e+i} \cap c_1(s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))^{f+j} \cap s^* q^*\alpha)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Beachtet man nun $p_* r_* = q_* s_*$ und $s^* q^* = r^* p^*$ und durchläuft obige Umformung analog rückwärts, so entsteht $s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha)$.

Proposition 3.1.5. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E ein Linienbündel. Dann ist*

$$s_1(E) \cap \alpha = -c_1(E) \cap \alpha \tag{3.13}$$

3.2 Chern–Klassen

Es sei X ein algebraisches Schema wie im vorigen Abschnitt und $E, p : \mathbb{P}(E) \to X$ ebenso wie oben definiert.

Definition 3.2.1. *Es sei $c_i(E)$ für $i \geqslant 0$ durch die Beziehung*

$$(1 + s_1(E)t + s_2(E)t^2 + \cdots)(c_0(E) + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \cdots) = 1 \tag{3.14}$$

als Identität formaler Potenzreihen in t definiert.

Anmerkung 3.2.1. Es ist also

$$c_i(E) = P_i(s_1(E), \ldots, s_i(E))$$

mit einem gewichtet homogenen Polynom $P_i(T_1, \ldots, T_i) \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_i]$. vom Grad i, bei dem T_j das Gewicht j hat. Eine rekursive Berechnung von P_i ist mit

$$c_0(E) = 1 \tag{3.15}$$
$$c_1(E) = -s_1(E) \tag{3.16}$$

und

$$\begin{aligned} c_i(E) = \\ &- (c_{i-1}(E)s_1(E) + c_{i-2}(E)s_2(E) + \cdots + c_1(E)s_{i-1}(E) + s_i(E)) \end{aligned} \tag{3.17}$$

möglich.

Anmerkung 3.2.2. Die $c_i(E)$ definieren also eine Abbildung

$$c_i(E) : A_k(X) \to A_{k-i}(X), \quad \alpha \mapsto c_i(E) \cap \alpha \tag{3.18}$$

durch

$$c_i(E) \cap \alpha = P_i(s_1(E), \ldots, s_i(E)) \cap \alpha \tag{3.19}$$

Die drei grundlegenden Beziehungen des vorigen Abschnitts für die $s_i(E)$ gelten mutatis mutandis auch für die $c_i(E)$:

Proposition 3.2.1 (eigentliche Projektion). *Es sei mit den eben eingeführten Bezeichnungen $f : X' \to X$ eine eigentliche Abbildung und $\alpha \in A_*(X')$. Dann gilt:*

$$f_*(c_i(f^*E) \cap \alpha) = c_i(E) \cap f_*\alpha \tag{3.20}$$

Proposition 3.2.2 (flacher Pullback). *Es sei mit den obigen Bezeichnungen $f : X' \to X$ eine flache Abbildung mit Relativdimension n und $\alpha \in A_*(X)$. Dann gilt:*

$$f^*(c_i(E) \cap \alpha) = c_i(f^*E) \cap f^*\alpha \tag{3.21}$$

Proposition 3.2.3. *Es sei $X, \alpha \in A_*(X)$ wie oben und E, F Vektorbündel auf X vom Rang $e+1$ und $f+1$. Dann ist*

$$c_i(E) \cap (c_j(F) \cap \alpha) = c_j(F) \cap (c_i(E) \cap \alpha) \tag{3.22}$$

Eine wichtige Eigenschaften der Chernklassen $c_i(E)$ ist ihr Verschwinden für $i > \operatorname{rang} E$:

Proposition 3.2.4. *Es sei $X, E, \alpha \in A_*(X)$ wie oben. Dann ist*

$$c_i(E) \cap \alpha = 0, \text{ für } i < 0 \text{ und } i > \operatorname{rang} E \tag{3.23}$$

$$c_0(E) \cap \alpha = \alpha \tag{3.24}$$

4

Deformation in den Normalkegel

4.1 Die Gerstenhaber–Algebra

4.1.1 Definition

Es sei A ein kommutativer Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und $R = A[T]$. Wir betrachten den gradierten Ring S zur Aufblasung $\mathrm{Bl}_{(I,T)}\, A[T]$, also zur Aufblasung von $\mathrm{Spec}\,(R)$ am Unterschema $V((I,T))$.

Es ist

$$S = R[Te, Ie] = \bigoplus_{d \geqslant 0} (I,T)^d \tag{4.1}$$

Anders gesagt haben wir

$$S_d = I^d e^d + I^{d-1} T e^d + \cdots + I T^{d-1} e^d + T^d e^d R \tag{4.2}$$

Wir haben in S zwei Elemente, die wir mit „T" ansprechen können, zum einen $T \in S_0 = R$, zum anderen $Te \in S_1$.

Zunächst betrachten wir

$$S/(TeS) = R[Ie] = A[T] \oplus \bigoplus_{d \geqslant 1} I^d = B' \tag{4.3}$$

Nun ist $I^d e^d A[T]$ modulo Te gleich $I^d A$. Das heißt $A[T]$ operiert auf B'_d vermöge $A[T] \to A = A[T]/TA[T]$. Also faktorisiert

$$\mathrm{proj}\,(B') \to \mathrm{Spec}\,(A[T])$$

als

$$\mathrm{proj}\,(B') \to \mathrm{Spec}\,(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,(A[T]),$$

liegt also über $V(T) \subseteq \mathrm{Spec}\,(R)$, wie zu erwarten war.

Nachdem wir so $V(Te)$ in $\mathrm{proj}\,(S)$ betrachtet haben, gehen wir zu $D_+(Te)$ über und analysieren $B = S_{(Te)}$. Es handelt sich dabei um die sogenannte *Gerstenhaber–Algebra*

Nach Definition ist

$$B_{(Te)} = \bigcup_{d>0} \frac{I^d e^d + I^{d-1} T e^d + \cdots I T^{d-1} e^d + R T^d e^d}{T^d e^d} =$$
$$= \bigcup_{d>0} I^d T^{-d} + I^{d-1} T^{-(d-1)} + \cdots I T^{-1} + R \tag{4.4}$$

Offensichtlich lassen sich alle diese Terme in den $\mathbb{Z}$-gradierten Ring

$$B = \cdots \oplus I^d T^{-d} \oplus I^{d-1} T^{-d+1} \oplus \cdots \oplus I T^{-1} \oplus A \oplus AT \oplus AT^2 \oplus \cdots \tag{4.5}$$

einbetten und sind in ihrer Vereinigung diesem gleich.

Definition 4.1.1. *Der Ring $B = B^\circ$ ist die Gerstenhaber–Algebra.*

Wir betrachten geometrisch $\mathrm{Spec}\,(B) = \mathrm{Spec}\,\big(S_{(Te)}\big) = D_+(Te) \subseteq \mathrm{proj}\,(S)$ als zugehöriges Schema. Da B eine $A[T]$–Algebra ist, gibt es einen Morphismus $\mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A[T])$, sogar Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,(B) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{proj}\,(S) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\,(A[T]) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B = S_{(Te)} & & S \arrow[ll] \\ & A[T] \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Es gilt

$$B_T = A[T, T^{-1}] \tag{4.7}$$
$$B/TB = \bigoplus_{d\geqslant 0} I^d / I^{d+1} T^{-d} = \bigoplus_{d \geqslant 0} I^d / I^{d+1} \tag{4.8}$$

Damit ist die Faser von $\mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A[T])$ über $V(T) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A[T])$ gleich

$$\mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{d\geqslant 0} I^d / I^{d+1}\right) = C_I A$$

wobei $C_I A$ der *Normalkegel von I in A ist.*

4.1.2 Die Faser von $\mathrm{Bl}_{(I,T)}\, A[T]$ über $V(T)$

Wir wollen als nächstes die Struktur von $\mathrm{proj}\,(S)$ über $V(T) \subseteq \mathrm{Spec}\,(A[T])$ untersuchen: Es ist

$$S_d = I^d R e^d + I^{d-1} T R e^d + \cdots + I T^{d-1} R e^d + T^d R e^d \tag{4.9}$$

und damit

$$TS_d = I^d TRe^d + I^{d-1}T^2Re^d + \cdots + IT^dRe^d + T^{d+1}Re^d \tag{4.10}$$

Also ist für $S' = S/(TS)$, also den projektiven Koordinatenring von $V(T) \subseteq \mathrm{Bl}_{(I,T)} A[T]$ auch

$$\boxed{S'_d = I^d Ae^d + I^{d-1}/I^dTAe^d + \cdots + I/I^2T^{d-1}Ae^d + A/IT^de^d} \tag{4.11}$$

Wir betrachten jetzt in S' die beiden Unterschemata $V(IS')$ und $V(TeS')$. Ihre Ideale sind

$$\boxed{(IS')_d = IS'_d = I^{d+1}Ae^d} \tag{4.12}$$

denn es ist ja $I \cdot I^{d-\mu}/I^{d-\mu+1}T^\mu Ae^d = 0$.

Weiter ist

$$\boxed{\begin{aligned}(TeS')_d = TeS'_{d-1} = \\ &= I^{d-1}TAe^d + I^{d-2}/I^{d-1}T^2Ae^d + \cdots \\ &\cdots + I/I^2T^{d-1}Ae^d + A/IT^dAe^d\end{aligned}} \tag{4.13}$$

Also ist auch

$$(IS')_d \cap (TeS')_d = (0) \tag{4.14}$$

und deshalb $V(IS') \cup V(TeS') = \operatorname{proj}(S')$

Die Komponenten selbst diskutieren wir jetzt:

Als erstes betrachten wir $V(IS') = \operatorname{proj}(S'/(IS')) = \operatorname{proj}\left(S^{(v)}\right)$ also

$$\boxed{\begin{aligned}(S'/(IS'))_d = I^d/I^{d+1}Ae^d + I^{d-1}/I^dTAe^d + \cdots \\ \cdots + I/I^2T^{d-1}Ae^d + A/IT^dAe^d\end{aligned}} \tag{4.15}$$

und somit

$$S^{(v)} = S^\circ[Te] \tag{4.16}$$

mit

$$S^\circ = \bigoplus_{d \geqslant 0} I^d/I^{d+1} \tag{4.17}$$

Es ist damit $V(I) \subseteq \operatorname{proj}(S')$ gleich $\operatorname{proj}(C_IA \oplus Te)$, also

$$\operatorname{proj}\left(S^{(v)}\right) \supseteq D_+(Te) = \operatorname{Spec}(C_IA),$$

und somit ist $D_+(Te)$ gleich dem Normalkegel von I in A.

Als zweites betrachten wir die Komponente $V(TeS') = \operatorname{proj}(S'/(TeS')) = \operatorname{proj}\left(S^{(h)}\right)$. Es ist

$$\boxed{(S'/(TeS'))_d = I^dAe^d} \tag{4.18}$$

und damit

$$\operatorname{proj}\left(S^{(h)}\right) = \operatorname{proj}\left(\bigoplus_{d \geqslant 0} I^d\right) = \mathrm{Bl}_I A \tag{4.19}$$

Anmerkung 4.1.1. Die Indizes in $S^{(v)}$ und $S^{(h)}$ stehen für *vertikal* und *horizontal*.

Der Schnitt der beiden Komponenten $V(IS')$ und $V(TeS')$ ist durch die Summe der Ideale gegeben:

$$\boxed{\begin{aligned}&(IS'+TeS')_d = \\ &\qquad = I^{d+1}Ae^d + I^{d-1}TAe^d + I^{d-2}/I^{d-1}T^2Ae^d + \cdots \\ &\qquad \cdots + I/I^2T^{d-1}Ae^d + A/IT^dAe^d\end{aligned}} \tag{4.20}$$

und damit

$$\boxed{(S'/(IS'+TeS'))_d = I^d/I^{d+1}Ae^d.} \tag{4.21}$$

Also ist

$$V(IS') \cap V(TeS') = \operatorname{proj}\left(\bigoplus_{d\geqslant 0} I^d/I^{d+1}\right) \tag{4.22}$$

gleich der Strikt–Transformierten von $V(I)$ in $\operatorname{Bl}_I A$.

4.1.3 Die Faser von $\mathrm{Bl}_{(I,T)}\, A[T]$ über $V((I,T))$

Die Faser von $\operatorname{proj}(S) \to \operatorname{Spec}(A[T])$ über $V((I,T))$, also der *exzeptionelle Divisor von* $\operatorname{Bl}_{(I,T)} A[T]$ ist schließlich gleich $\operatorname{proj}(Q)$ mit

$$Q = \bigoplus_{d\geqslant 0} (I,T)^d/(I,T)^{d+1} = Q'[w] \tag{4.23}$$

mit

$$Q_d = (I^d/I^{d+1}) + (I^{d-1}/I^d)T + \cdots + (I/I^2)T^{d-1} + (A/I)T^d \tag{4.24}$$

und

$$Q'_d = I^d/I^{d+1} \tag{4.25}$$

also

$$Q' = \bigoplus_{d\geqslant 0} I^d/I^{d+1}.$$

Die Faser von $\operatorname{Bl}_{(I,T)} R$ über $V((I,T))$ zerfällt somit in die beiden Teile $V(w) = \operatorname{proj}(Q')$, also in den *exzeptionellen Divisor von I in* $\operatorname{Bl}_I A$ und in $D_+(w) = \operatorname{Spec}(Q') = C_I A$, also in den *Normalkegel von I in A*.

Der folgende Satz ist von großer Wichtigkeit für die Grundlegung der Schnittheorie:

Proposition 4.1.1. *Es sei X ein rein k–dimensionales, noethersches Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist auch $C_Y X$ ein rein k–dimensionales Schema.*

Beweis. Ist Spec $(A) = X$ ein rein k–dimensionales Schema, so ist $X' = X \times \mathbb{A}^1 =$ Spec $(A[T])$ ein rein $(k+1)$–dimensionales Schema. Weiter sind $Y = V(I) \subseteq X$ und $Y \times \mathbb{A}^1 =$ Spec $(A/I[T]) \subseteq X'$ abgeschlossene Unterschemata, wobei $Y' = Y \times \{T = 0\} \subseteq X'$ keine der $(k+1)$–dimensionalen irreduziblen Komponenten von X' umfaßt.

Die Aufblasung $\mathrm{Bl}_{Y'} X' = \mathrm{proj}\,(S)$, die wir oben studiert haben, ist also nach einem Standardtheorem über Aufblasungen ebenfalls rein $(k+1)$–dimensional. Damit ist der exzeptionelle Divisor $E \subseteq \mathrm{Bl}_{Y'} X'$ ein rein k–dimensionales Unterschema von $\mathrm{Bl}_{Y'} X'$.

Nach obiger Überlegung zerfällt (in lokaler Betrachtung) E in $D_+(w) = C_I A$ und $V(w) = \mathrm{Bl}_I A$. Damit ist der Normalkegel $C_Y X = C_I A$ ein offenes Unterschema eines rein k–dimensionalen Schemas und somit selbst ein rein k-dimensionales Schema.

4.1.4 Ein Lemma über die Gerstenhaber–Algebra

Es sei $I \subseteq A$ ein Ideal eines kommutativen Ringes A und $J \subseteq A$ ein weiteres Ideal. Weiter sei wie oben

$$B^\circ = B_I^\circ A = \cdots + I^d T^{-d} + \cdots IT^{-1} + A + AT + \cdots + AT^d + \cdots \tag{4.26}$$

die zugehörige Gerstenhaber–Algebra. Weiter sei $J^\circ \subseteq B^\circ$ das Ideal, das die Beziehung

$$J^\circ = B^\circ \cap (B^\circ / JB^\circ)_T \tag{4.27}$$

erfüllt. Es gelte also

$$J^\circ = \{ b^\circ \in B^\circ \mid T^e b^\circ \in JB^\circ, e \geqslant 0 \} \tag{4.28}$$

so daß

$$\begin{aligned} J^\circ = \cdots + (I^d \cap J)T^{-d} + \cdots + (I \cap J)T^{-1} + \\ + J + JT + JT^2 + \cdots + JT^d + \cdots \end{aligned} \tag{4.29}$$

ist.

Lemma 4.1.1. *Mit den oben eingeführten Begriffen ist*

$$B^\circ/(T, J^\circ) = C_{(I+J)}(A/J) = \bigoplus_{d \geqslant 0} (I^d + J)/(I^{d+1} + J) \tag{4.30}$$

Beweis. Nach (4.29) ist

$$\begin{aligned} B^\circ/J^\circ = \cdots + I^d/(I^d \cap J)T^{-d} + \cdots + I/(I \cap J)T^{-1} + \\ + A/J + (A/J)T + \cdots + (A/J)T^d + \cdots \end{aligned}$$

oder eben

$$\begin{aligned} B^\circ/J^\circ = \cdots + (I^d + J)/JT^{-d} + \cdots + (I + J)/JT^{-1} + \\ + A/J + (A/J)T + \cdots + (A/J)T^d + \cdots \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$B^\circ/(J^\circ, T) = (B^\circ/J^\circ)/T(B^\circ/J^\circ) = \bigoplus_{d \geqslant 0} (I^d + J)/(I^{d+1} + J) = C_{(I+J)}(A/J).$$

4.2 Der globale Fall

Für den globalen Fall der Deformation in den Normalkegel betrachte eine abgeschlossene Immersion

$$f : X \to Y$$

von algebraischen k–Schemata. Weiter sei $Y' = \mathbb{P}^1_k \times_k Y$. Es sei T die projektive Koordinate von $\mathbb{P}^1_k$ und und $i : X \hookrightarrow Y'$ die abgeschlossene Immersion von X in die Faser bei $T = \infty$ via f. Weiter sei $\mathfrak{J}$ die Idealgarbe des Unterschemas $i(X) \subseteq Y'$.

Definition 4.2.1. *Es sei*

$$M = M_X Y = \mathrm{Bl}_{\mathfrak{J}}\, Y'$$

die Aufblasung von Y' bei $\mathfrak{J}$.

Nach den lokalen Betrachtungen oben ist M die globale Version des Schemas $\mathrm{Bl}_{(I,T)}\, A[T]$. In diesem Schema war als offenes Unterschema $\mathrm{Spec}\,(B^\circ)$, das Spektrum der Gerstenhaber–Algebra, enthalten gewesen.

Dementsprechend gibt es auch in M ein offenes Unterschema M°, so daß

$$M^\circ|_{\mathbb{P}^1_k \times U}$$

für ein offenes Unterschema $U = \mathrm{Spec}\,(A) \subseteq Y$ gleich $\mathrm{Spec}\,(B^\circ)$ ist.

Definition 4.2.2. *Für $f : X \to Y$ wie oben ist $M^\circ = M^\circ_X Y$ der* Deformationsraum in den Normalkegel.

Es gilt dann, nach den obigen lokalen Betrachtungen, daß über $T = \infty$ die Faser von M° gleich dem Normalkegel $C_X Y$ ist. Diese Faser ist zugleich ein effektiver Divisor in M°, nämlich der Schnitt des exzeptionellen Divisors $E \subseteq M$ mit dem offenen Teil $M^\circ \subseteq M$.

5

Schnitte

5.1 Bildung von Schnitten

5.1.1 Der σ–Morphismus

Proposition 5.1.1. *Es sei $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion. Wir haben ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A_{k+1}N \arrow[r, "i_*"] & A_{k+1}M^\circ \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "i^*"] & A_{k+1}(Y \times \mathbb{A}^1_k) \arrow[r] & 0 \\ & A_kN & A_kY \arrow[l, dashed, "\sigma"] \arrow[u, "\pi^*", "\cong"'] & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

wobei die obere exakte Folge durch das Tripel

$$N \xrightarrow{i} M^\circ \supseteq M^\circ - N = \mathbb{A}^1_k \times Y$$

induziert wird. Dabei ist $N = C_XY$ der oben eingeführte Normalkegeldivisor in M°.

Beweis. Die Abbildung π^* entspricht dem Isomorphismus $\pi^* : A_kY \to A_{k+1}\mathbb{A}^1_Y$ die durch die flache affine Bündelabbildung $\pi : \mathbb{A}^1_Y \to Y$ induziert wird.

Weiterhin ist das Normalbündel $\mathcal{N}_{N|M^\circ}$ von N in M° trivial, so daß die Beziehung

$$i^* \circ i_* = 0$$

gilt. Damit ist die Abbildung $\sigma : A_kY \to A_kN$ wohldefiniert.

Es sei nun im folgenden $f : X \to Y$ eine reguläre Immersion mit Kodimension d. Damit ist die Abbildung

$$s_N^* : A_kN \to A_{k-d}X \tag{5.2}$$

wohldefiniert durch

$$p^* \circ s_N^* = \mathrm{id} \tag{5.3}$$

wobei die Isomorphismen $p^* : A_{k-d}X \to A_k N$ durch die flache Vektorbündelabbildung $p : N \to X$ induziert werden.

Ist nun $V \subseteq Y$ eine Untervarietät und $W = X \cap V$, so ist wegen Lemma 4.1.1

$$\sigma([V]) = [C_W V] \tag{5.4}$$

und damit

$$X \bullet V = s_N^*([C_W V]) = s_N^*(\sigma([V])) \tag{5.5}$$

Es folgt

Proposition 5.1.2. *Für eine reguläre Immersion $f : X \to Y$ von Kodimension d wie oben ist die Abbildung*

$$f^* : A_k Y \xrightarrow{\sigma} A_k N \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d}X, \quad V \mapsto X \bullet V \tag{5.6}$$

wohldefiniert auf dem Niveau von Zykelklassen.

5.1.2 Schnitte im allgemeinsten Fall

Im allgemeinsten Fall besteht ein cartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

von algebraischen k–Schemata, wobei $f : X \to Y$ eine reguläre Immersion von Kodimension d ist.

Der Normalkegel $C_X Y = N_X Y$ ist dann ein Rang d Vektorbündel über X und $g'^* N_X Y = N$ ist ein Rang d Vektorbündel über X'.

Aus dem lokalen Quadrat für obiges globale Quadrat, also aus

$$\begin{tikzcd} B/IB & B \arrow[l] \\ A/I \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

entnehmen wir, daß für $J = IB$ eine Surjektion

$$C_I A = \bigoplus_{p \geqslant 0} I^p/I^{p+1} \twoheadrightarrow \bigoplus_{p \geqslant 0} J^p/J^{p+1} = C_J B \tag{5.9}$$

also eine abgeschlossene Immersion

$$i' : \operatorname{Spec}(C_{X'}Y') \hookrightarrow \operatorname{Spec}(g'^* N_X Y) \tag{5.10}$$

besteht.

Für ein $V \in Z_k Y'$ und $W = f'^{-1}V$ ist $C_W V$ ein abgeschlossenes k–dimensionales Unterschema von $C_{X'}Y'$, also mit der Immersion $i' : C_{X'}Y' \hookrightarrow N = g'^* N_X Y$

$$i'_*[C_W V] \in Z_k N$$

Benutzt man die Isomorphie $s_N^* : A_k N \to A_{k-d} X'$, so entsteht eine Schnittabbildung

$$f^! : Z_k Y' \xrightarrow{V \mapsto i'_*[C_W V]} A_k N \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d} X' \tag{5.11}$$

Proposition 5.1.3. *Die eben eingeführte Abbildung $f^! : Z_k Y' \to A_{k-d} X'$ ist wohldefiniert auf der Ebene von Zykelklassen, nämlich mit*

$$f^! : A_k Y' \xrightarrow{\sigma} A_k(C_{X'}Y') \xrightarrow{i'_*} A_k(g'^* N_X Y) \xrightarrow{s_N^*} A_{k-d} X' \tag{5.12}$$

Dabei wird σ wie oben aus dem Tripel

$$C_{X'}Y' \xrightarrow{i} M^\circ_{X'}Y' \supseteq M^\circ_{X'}Y' - C_{X'}Y'$$

und dem oben benutzten Diagramm gefunden.

Literaturverzeichnis

[1] Fulton, William: *Intersection theory. 2nd ed.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 2. Berlin: Springer. xiii, 470 p. , 1998

Sachverzeichnis