MODULSCHEMATA ELLIPTISCHER KURVEN

Grundlagen

Cartier-Divisoren

A-Strukturen

Modulschemata

Das allgemeine Modulproblem

Das Level-N Modulproblem

Aufstieg der Modulschemata Es sei (M_m, r_m, s_m, E) das feine Modulschema zum vollen Level-m-Modulproblem für elliptische Kurven über $\mathbb{Z}[1/m]$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ M_m \arrow[u, bend left, "{r_m, s_m}"] \end{tikzcd}$$

Wir wollen daraus das feine Modulschema $(M_{mn}, r_{mn}, s_{mn}, E')$ für das Level-nm-Modulproblem über $\mathbb{Z}[\frac{1}{mn}]$ konstruieren.
Wir betrachten dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & M_{mn} \arrow[dl, "w_1"'] \arrow[dd, "p"] \arrow[dr, "w_2"] & & \\ & X_1 \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \arrow[dr, "v_2"] & \\ E \arrow[dr, "{[n]}"'] & & M_m \arrow[dl, "r_m"] \arrow[dr, "s_m"'] & & E \arrow[dl, "{[n]}"] \\ & E & & E & \end{tikzcd}$$

in dem alle Quadrate kartesisch sind. Die Abbildung p ist endlich etale.
Weiter setzen wir

$$r''_{mn} = v_1 \circ w_1 = q_1$$
$$s''_{mn} = v_2 \circ w_2 = q_2$$

Mit dem kartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M_{mn} \arrow[r] \arrow[u, dotted, bend left, "{r_{mn}, s_{mn}}"] \arrow[ur, dotted, "{r''_{mn}, s''_{mn}}"] & M_m \end{tikzcd}$$

konstruieren wir sowohl $E' = E'_{mn}$, als auch die Schnitte r_{mn}, s_{mn}.
Es sei nun $\mathscr{E} \to T$ eine elliptische Kurve über T mit Schnitten r'_{mn}, s'_{mn}:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[u, bend left, "{r'_{mn}, s'_{mn}}"] \end{tikzcd}$$

Um das notwendige kartesische Diagram

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\ T \arrow[r, "u'"] \arrow[u, bend left, "{r'_{mn}, s'_{mn}}"] & M_{mn} \arrow[u, bend right, "{r_{mn}, s_{mn}}"'] \end{tikzcd}$$

zu konstruieren, beginnen wir mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "{[n]}"] & E \arrow[d, "{[n]}"] \\ \mathscr{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ T \arrow[r, "u"'] \arrow[uu, bend left, "{r'_{mn}, s'_{mn}}"] & M_m \arrow[u, bend right, "{r_m, s_m}"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

um u und ϕ festzulegen.
Es ist $u' : T \to M_{mn}$ gegeben durch:

$$q_1 \circ u' = \phi \circ r'_{mn}$$
$$q_2 \circ u' = \phi \circ s'_{mn}$$
$$p \circ u' = u$$

Daß u' auch wirklich die Darstellungsabbildung ist, erkennt man am Diagramm

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ T \arrow[r, "u'"'] & M_{mn} \arrow[r, "p"'] & M_m \end{tikzcd}$$

in dem alle Quadrate kartesisch sind. Es ist damit

$$u'^*(E') = (p\,u')^*(E) = u^*(E) = \mathscr{E}$$

und u' ist als Darstellungsabbildung $u' : T \to M_{mn}$ nachgewiesen.

Jürgen Böhm, Wertheim, November 30, 2025