

Jürgen Böhm

Mathematische Notizen

15. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Algebra und Geometrie	1
1.1	Algebraische Geometrie	1
1.1.1	Hilbertfunktion, p_a, p'_a Freitag, 29.11.2013	1
1.1.2	$H_X(d)$, Hilbertfunktion Freitag, 29.11.2013	2
1.1.3	Hurwitz-Formel Samstag, 3.1.2015	2
1.1.4	Hartshorne, Exercise III, (5.5) Montag 19.1.2015 ...	3
1.1.5	Hartshorne, Exercise III, (5.6) Montag 19.1.2015 ...	4
1.1.6	Hartshorne, Ex. V 1.2 Donnerstag 5.3.2015	7
1.1.7	Hartshorne, Ex. V 1.3 Donnerstag, 5.3.2015	8
1.1.8	Hartshorne, Ex. V 1.4 Donnerstag 5.3.2015	9
1.1.9	Hartshorne, Ex. V 1.5 Donnerstag 5.3.2015	9
1.1.10	Atiyah-Macdonald, Übungsaufgabe Mittwoch 18.3.2015	10
1.1.11	Schnittprodukt von Divisoren auf einer Fläche Donnerstag 26.3.2015	11
1.1.12	Ein treuflacher Morphismus Freitag 27.3.2015	14
1.1.13	Eine rationale Kurve in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ Dienstag 14.4.2015 ...	15
1.1.14	Deformation in den Normalkegel Sonntag 26.4.2015 ..	15
1.1.15	Berechnung der Kohomologie kohärenter Garben auf \mathbb{P}_A^n Samstag, 9.5.2015	17
1.1.16	Berechnung von Syzygienmoduln Samstag, 9.5.2015 ..	20
1.1.17	Periodische Kettenbrüche und quadratische Irrationalitäten Montag, 17.8.2015	21
1.1.18	Summen dualer Isogenien Samstag, 16.4.2016	23
1.1.19	Display einer Monade Donnerstag, 09.06.2016	24
1.1.20	Ein etaler Morphismus Montag 27.06.2016	29
1.1.21	Normale und zusammenhängende projektive algebraische Schemata Montag, 01.08.2016	30
1.1.22	Resultanten als Kombination ihrer Polynome Donnerstag, 22.09.2016	31
1.1.23	Die Grassmannvarietät $\text{Gr}(k, n)$ Samstag, 24.09.2016 .	32

1.1.24	Änderung von $H^1(X, \Omega_X)$ unter Aufblasung eines Punktes P in einer Fläche X . Freitag, 06.01.2017...	35
1.1.25	Integralkurven eines holomorphen Vektorfeldes $z \mapsto f(z)$ von $\mathbb{C} \rightarrow TC$. Montag, 13.02.2017	37
1.1.26	Kohomologiegruppen von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ auf \mathbb{P}^n_A . Montag 11.09.2017	38
1.1.27	Berechnung der algebraischen de Rham–Kohomologie $H^i_{DR}(X)$. Dienstag 17.10.2017	40
1.1.28	Gröbner bases of resultants and their monomial ideals. Donnerstag, 16.11.2017	44
1.1.29	Algebraic independence of polynomials. Freitag, 01.12.2017	45
1.1.30	Hauptsatz über etale Morphismen. Sonntag, 04.03.2018	46
1.1.31	Computation of the algebraic de Rham–cohomology $H^i_{DR}(X)$. Mittwoch 14.03.2018	46
1.1.32	Quasi–isomorphe Injektion eines Komplexes in einen Komplex injektiver Objekte Mittwoch 13.06.2018...	50
1.1.33	Natürliche Abbildungen zwischen $H^p FJ^\bullet$ und $FH^p J^\bullet$ Donnerstag 14.06.2018	52
1.1.34	Das Poincaré–Lemma Donnerstag 15.06.2018	53
1.1.35	Affine Torsoren über quasiprojektiven Schemata Donnerstag 12.07.2018	54
1.1.36	Computing approximations to the algebraic de Rham cohomology $H^p_{DR}(X)$ Friday 27.07.2018	55
1.1.37	Explizite Darstellung von $\Omega^p_{X k}$ für eine projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Samstag 04.08.2018	57
1.1.38	Der Gauss–Manin Zusammenhang für eine glatte projektive Familie $X \rightarrow S$. Freitag 10.08.2018	59
2	Funktionalanalysis	65
2.1	Metrische Räume	65
2.2	Normierte Räume	66
2.3	Hilberträume	68
2.3.1	Skalarprodukt	68
2.3.2	Darstellungssatz	71
2.3.3	Orthonormalbasen	71
2.3.4	Hermiteische Operatoren	73
2.4	Das Lebesgue–Integral	73
2.4.1	Maße	73
2.4.2	Nullmengen	74
2.4.3	Treppenfunktionen	75
2.4.4	PDI–Mengen	76
2.4.5	Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge	79
2.4.6	Der Satz von Beppo Levi	86
2.4.7	Der Satz von Lebesgue	89

2.5	Fundamentalsätze der Funktionalanalysis	90
3	Algebraische Topologie	95
3.1	Grundlagen	95
3.1.1	Methode der azyklischen Modelle	95
4	Übungsaufgaben aus „3264 and all that“	99
4.1	Kapitel 2	99
4.1.1	Übungsaufgabe 2.23	99
4.1.2	Übungsaufgabe 2.24	99
4.1.3	Übungsaufgabe 2.25	100
4.1.4	Übungsaufgabe 2.26	101
4.1.5	Übungsaufgabe 2.27	102
4.1.6	Übungsaufgabe 2.28	102
4.1.7	Übungsaufgabe 2.29	104
4.1.8	Übungsaufgabe 2.31	105
4.1.9	Übungsaufgabe 2.32	107
4.1.10	Übungsaufgabe 2.33	108
4.1.11	Übungsaufgabe 2.34	109
4.1.12	Übungsaufgabe 2.35	109
4.1.13	Übungsaufgabe 2.36	110
4.1.14	Aufblasung von \mathbb{P}^3 in einer Geraden $L \subseteq \mathbb{P}^3$	110

Algebra und Geometrie

1.1 Algebraische Geometrie

1.1.1 Hilbertfunktion, p_a, p'_a

Freitag, 29.11.2013

Für eine Fläche X ist

$$p_a(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

Für eine Kurve X ist (wir nehmen an, X nichtsingulär, also $p_a(X) = p_g(X) = g(X)$):

$$p_g(X) = g(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = (\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1)(-1)^r$$

mit $r = \dim X = 1$. Daher definiert man allgemein

$$p_a(X) = (-1)^r (\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1)$$

mit $r = \dim X$.

Ein anderer Ansatz ist $X = \text{proj}(S/I)$ mit $S = k[x_0, \dots, x_m]$ und $P_X(d) = \dim_k(S/I)_d$.

Dann nennt man $p'_a(X) = (-1)^r (P_X(0) - 1)$ Wir zeigen

$$p'_a(X) = p_a(X).$$

Es hängt also $p'_a(X)$ nicht von der Einbettung $\text{proj}(S/I) \hookrightarrow \text{proj}(S) = \mathbb{P}_k^m$ ab.

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow i_* \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathcal{J}(d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) \rightarrow i_* \mathcal{O}_X(d) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

für $d \gg 0$. Es ist dann auch $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \chi(X, \mathcal{O}_X(d)) = H_X(d)$, wobei H_X das Hilbertpolynom $H_X(d) = \chi(X, \mathcal{O}_X(d))$ ist.

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(d)) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X(d))$$

Aus (1.1) folgt

$$\dim H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)) - \dim H^0(\mathbb{P}, \mathcal{I}(d)) = \dim(S/I)_d = P_X(d).$$

Also $P_X(d) = H_X(d)$ für alle $d \gg 0$. Also $P_X(0) = H_X(0)$ und es ist $p'_a(X) = (-1)^r(P_X(0) - 1) = (-1)^r(H_X(0) - 1) = (-1)^r(\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1) = p_a(X)$.

1.1.2 $H_X(d)$, Hilbertfunktion

Freitag, 29.11.2013

Warum ist $H_X(d) = \chi(X, \mathcal{O}_X(d))$ polynomiell für $X \subseteq \mathbb{P}_k^m$? Wir benutzen Induktion über m : Wähle ein $x_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)(\mathbb{P})$ mit $X \not\subseteq V(x_0)$.

Dann ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\cdot x_0} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X''} \rightarrow 0$$

Es ist $\text{supp } X', \text{supp } X'' \subseteq V(x_0)$. Durch Induktion über m kann man also schließen, daß in der Sequenz

$$H_{X'}(d) - H_X(d-1) + H_X(d) - H_{X''}(d) = 0$$

die Terme $H_{X'}(d)$ und $H_{X''}(d)$ in d polynomiell sind. Also auch $H_X(d)$.

N.B.: Man benutzt, daß für $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ auch $\chi(X, \mathcal{F}') - \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{F}'') = 0$ ist. (χ ist Abbildung vom Euler-Typ).

Geht sogar für einen beliebigen kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} mit X projektiv über $\text{Spec}(A)$ mit $\mathcal{O}_X(1)$ als sehr ampler Garbe. Der Satz sei für $X \subseteq \mathbb{P}_A^{m'}$ mit $m' < m$ bereits gezeigt und $X \subseteq \mathbb{P}_A^m$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\cdot x_0} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

Auch hier ist $\text{supp } \mathcal{F}', \text{supp } \mathcal{F}'' \subseteq V(x_0)$.

1.1.3 Hurwitz-Formel

Samstag, 3.1.2015

Betrachte eine Abbildung von Kurven $f: X \rightarrow Y$, mit X, Y glatt über k . Es sei f vom Überlagerungsgrad n .

Dann ist $\Omega_{X|k}$ und $\Omega_{Y|k}$ lokal freier \mathcal{O}_X - bzw. \mathcal{O}_Y -Modul (Linienbündel). Es ist $\Omega_{X|k} = \mathcal{O}_X(K_X)$ und $\Omega_{Y|k} = \mathcal{O}_Y(K_Y)$ per definitionem.

Man hat die Sequenz

$$0 \rightarrow f^* \Omega_{Y|k} \rightarrow \Omega_{X|k} \rightarrow \Omega_{X|Y} \rightarrow 0$$

Nur die 0 links ist zu begründen: Ist lokal $\mathcal{O}_{Y,y} = A$ und $\mathcal{O}_{X,x} = B$, so ist $\Omega_{Y|k,y} = A$ und $\Omega_{X|k,x} = B$. Man hat also links eine B -lineare Abbildung

$B \otimes_A A \rightarrow B$. Gäbe es einen Kern, so hätte man $0 \rightarrow \mathfrak{b} \rightarrow B \rightarrow B$ mit $\mathfrak{b} \supsetneq (0)$. Also $B/\mathfrak{b} \hookrightarrow B$. Betrachtet man Ass_B auf beiden Seiten, so stünde links \mathfrak{m}_B und rechts (0) . Da aber $\text{Ass } B/\mathfrak{b} \subseteq \text{Ass } B$ wäre das ein Widerspruch. Also steht links die 0. ($\mathfrak{b} = B$ ist ausgeschlossen, da sonst $\Omega_{X|Y,x} = \Omega_{X,x} = B$ und damit $\Omega_{X|Y}$ keine Torsionsgarbe wäre).

$\Omega_{X|Y}$ ist eine Torsionsgarbe

$$\Omega_{X|Y} = \sum_{P \in X} \mathcal{O}_{X,P} / \mathfrak{m}_P^{e_P-1}$$

mit Träger den Punkten $P \in X$ für die $e_P > 0$ ist.

Man tensoriere nun die obige Sequenz mit $\Omega_{X|k}^{-1}$ und erhalte

$$0 \rightarrow \Omega_{X|k}^{-1} \otimes f^* \Omega_{Y|k} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X|Y} \rightarrow 0$$

Der $\text{supp } \Omega_{X|Y}$ ist gleich dem effektiven Divisor $R = \sum_{P \in X} (e_P - 1)P$.

Dann ist $\Omega_{X|k}^{-1} \otimes f^* \Omega_{Y|k} = \mathcal{O}_X(-R)$. Also wenn man deg anwendet

$$-(2g_X - 2) + n(2g_Y - 2) = - \sum_{P \in X} (e_P - 1)$$

also

$$(2g_X - 2) = n(2g_Y - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1)$$

Das ist die Hurwitzformel.

1.1.4 Hartshorne, Exercise III, (5.5)

Montag 19.1.2015

Es sei $X = \mathbb{P}_k^r$ und $i : Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit $\dim Y = q$. Weiter sei Y ein vollständiger Durchschnitt (idealtheoretisch vollständiger Durchschnitt, also $I(Y) = (f_1, \dots, f_s)$ mit $s + q = r$).

Dann gilt

- a) für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n))$$

surjektiv. (Die Abbildung stammt aus $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$).

- b) Y ist zusammenhängend.
- c) Es ist $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = 0$ für alle $0 < i < q$ und $n \in \mathbb{Z}$.
- d) Es ist $p_a(Y) = H^q(Y, \mathcal{O}_Y)$

1.1.5 Hartshorne, Exercise III, (5.6)

Montag 19.1.2015

Es sei $Q = V(xy - zw)$ die quadratische Fläche im \mathbb{P}_k^3 . Es ist dann $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\text{Pic } Q = \text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \text{Pic } \mathbb{P}^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Jedes Linienbündel auf Q hat also einen Typ $\mathcal{O}_Q(a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Gleiches gilt dann auch wegen der Isomorphismen für die Cartierdivisoren und ihre Klassen. Jede Klasse hat einen Typ (a, b) .

Insbesondere ist $\mathcal{O}_Q(n) = \mathcal{O}_Q(n, n)$.

Man hat die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow i_*\mathcal{O}_Q \rightarrow 0$$

mit $f = xy - zw$. Aus ihr folgt sofort $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(n, n)) = 0$

Es gilt nun

- a) 1. Es ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = 0$ für $|a - b| \leq 1$.
2. Es ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = 0$ für $a, b < 0$.
3. Es ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, 0)) \neq 0$ für $a \leq -2$.
- b) 1. Wenn Y eine (a, b) Kurve in Q ist, mit $a, b > 0$, dann ist Y zusammenhängend.
2. Sei k algebraisch abgeschlossen und $a, b > 0$. Dann existiert eine nicht-singuläre Kurve $Y \subseteq Q$, die effektiver Cartierdivisor vom Typ (a, b) ist.
3. Eine irreduzible nicht-singuläre Kurve Y vom Typ (a, b) auf Q ist genau dann projektiv normal, wenn $|a - b| \leq 1$ ist.
Insbesondere ist z.B. Y vom Typ $(1, 3)$ nicht-singulär in Q und \mathbb{P}^3 aber nicht projektiv normal.
- c) Es sei Y ein lokal prinzipales Unterschema vom Typ (a, b) . Dann ist

$$p_a(Y) = ab - a - b + 1$$

Beweis.

- a) 1. Für $a = b = n$ ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(n, n)) = 0$ wie oben schon bemerkt.

Es ist exakt

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-2) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

also auch

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(d-2) \rightarrow \mathcal{O}_P(d) \rightarrow \mathcal{O}_Q(d) \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

und wegen $H^1(P, \mathcal{O}_P(d-2)) = 0$ auch

$$0 \rightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(d-2)) \rightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(d)) \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(d, d)) \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Daraus bestimmen wir allgemein $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(d, d))$.

Weiter ist exakt

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-1, 0) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

und deshalb

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(a-1, a) \rightarrow \mathcal{O}_Q(a, a) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

Tensorieren dieser letzten Sequenz mit $- \otimes \mathcal{O}_Q(0, -1)$ ergibt

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(a-1, a-1) \rightarrow \mathcal{O}_Q(a, a-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1) \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

Da $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(d, d)) = 0$ ist auch exakt

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a-1)) \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a, a-1)) \rightarrow \\ \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Da wir $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a-1))$ nach obigem schon kennen, kennen wir auch $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a, a-1))$. Nun benutzen wir die lange exakte Sequenz zu (1.6):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a)) \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a, a)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a)) \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, a)) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Alle Terme außer $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a))$ sind bekannt, der letztere kann also aus diesen erschlossen werden.

Es ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a-1, a)) = 0$ wie eine Berechnung mit Maple zeigt.

a) 2. Es ist

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-q, 0) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \prod_q \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

also

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-d-q, -d) \rightarrow \mathcal{O}_Q(-d, -d) \rightarrow \prod_q \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d) \rightarrow 0$$

Wegen $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)) = 0$ und $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(-d, -d)) = 0$ ist auch $H^1(\mathcal{O}_Q(-d-q, -d)) = 0$.

a) 3. Es ist

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-a, 0) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \prod_a \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

Es folgt:

$$k = H^0(Q, \mathcal{O}_Q) \rightarrow k^a = \prod_a H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q(-a, 0)) \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q) = 0$$

für $a \geq 2$ muß $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(-a, 0)) \neq 0$ sein.

b) 1. Betrachte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-a, -b) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

Man hat

$$H^0(Q, \mathcal{O}_Q) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q(-a, -b))$$

Der H^1 -Term verschwindet und $H^0(Q, \mathcal{O}_Q) = k$. Also $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$.

b) 2. Betrachte ($a, b > 0$)

$$Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \rightarrow \mathbb{P}^{ab+a+b} = P$$

Die zweite Abbildung ist ein Produkt von Veronese-Abbildungen von den Graden a, b . Die dritte Abbildung ist die Segre-Abbildung. Nennt man ϕ das Produkt aller Abbildungen (eine abgeschlossene Immersion), so ist $\phi^*\mathcal{O}_P(1) = \mathcal{O}_Q(a, b)$ und es sei $\phi(Q) = W \subseteq P$. Nach dem Satz von Bertini ist ein generischer Hyperenebenen-Schnitt $H \cap W$ nicht-singulär. Es ist dann $Y = \phi^{-1}(H \cap W) = V(\phi^*(s))$ mit $s \in \mathcal{O}_P(1)(P)$ und $\phi^*(s) \in \mathcal{O}_Q(a, b)(Q)$ eine nichtsinguläre Kurve in Q vom Typ (a, b) .

b) 3. Q ist vollständiger Durchschnitt im \mathbb{P}_k^3 . Also ist $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)) \rightarrow H^0(Q, \mathcal{O}_Q(d)) \rightarrow 0$ surjektiv für alle d .

Betrachte jetzt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-a, -b) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

mit $a, b > 0$. Tensorieren mit $\mathcal{O}_Q(d)$ liefert:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(d-a, d-b) \rightarrow \mathcal{O}_Q(d) \rightarrow \mathcal{O}_Y(d) \rightarrow 0$$

Man hat die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(d-a, d-b)(Q) \rightarrow \mathcal{O}_Q(d)(Q) \rightarrow \mathcal{O}_Y(d)(Y) \rightarrow H^1(Q, \mathcal{O}_Q(d-a, d-b))$$

Also ist $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(d)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(d)) \rightarrow 0$ genau dann surjektiv wenn $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(d-a, d-b)) = 0$. Das ist für $|a-b| \leq 1$ jedenfalls richtig. Also ist weiter $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(d)) \rightarrow 0$ surjektiv und damit Y projektiv normal im \mathbb{P}_k^3 .

Umgekehrt sei oBdA $a = b + s$ mit $s \geq 2$. Dann ist $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(d-a, d-b))$ für $d = b$ gleich $H^1(Q, \mathcal{O}_Q(-s, 0)) \neq 0$. Also Surjektivität rechts (äquivalent zu projektiver Normalität) nur für $|a-b| \leq 1$.

c) Man hat die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-a, -b) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

Aus ihr folgt mit

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{\nu=0}^{\dim X} (-1)^\nu H^\nu(X, \mathcal{F})$$

daß

$$\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = \chi(Q, \mathcal{O}_Q) - \chi(Q, \mathcal{O}_Q(-a, -b))$$

Aus der Sequenz ($P = \mathbb{P}^3$):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-2) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow 0$$

folgt

$$\chi(Q, \mathcal{O}_Q) = \chi(P, \mathcal{O}_P) - \chi(P, \mathcal{O}_P(-2))$$

sowie nach tensorieren mit $\mathcal{O}_P(d)$:

$$\chi(Q, \mathcal{O}_Q(d, d)) = \chi(P, \mathcal{O}_P(d)) - \chi(P, \mathcal{O}_P(d-2))$$

Man hat die Sequenz (es ist $V(\mathcal{O}_Q(-q, 0)) = \coprod_q \mathbb{P}_k^1$)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-q, 0) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \prod_q \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

Tensorieren mit $\mathcal{O}_Q(-d, -d)$ liefert

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q(-q-d, -d) \rightarrow \mathcal{O}_Q(-d, -d) \rightarrow \prod_q \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d) \rightarrow 0$$

Es sei $-q-d = -a$, $-d = -b$, also $q = a-b$ und $d = b$ (oBdA $a \geq b$): Also ist

$$\chi(Q, \mathcal{O}_Q(-a, -b)) = \chi(Q, \mathcal{O}_Q(-b, -b)) - (a-b)\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b))$$

Man verwende nun $\chi(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) = \binom{d+r}{r}$ für $d \geq 0$ und $\chi(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)) = (-1)^r \binom{-(d+r+1)+r}{r}$ für $d \leq -r-1$ und 0 sonst.

Dann ergibt sich $(-1)(\chi(Y, \mathcal{O}_Y) - 1) = p_a(Y) = ab - a - b + 1$ für alle a, b .

1.1.6 Hartshorne, Ex. V 1.2

Donnerstag 5.3.2015

Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine Fläche im \mathbb{P}^n und H der zugehörige sehr ample Divisor.

Es sei das Hilbertpolynom $P(m) = \chi(X, \mathcal{O}_X(m))$ mit $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$. Der Satz von Riemann–Roch für Flächen lautet

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}D.(D - K) + 1 + p_a(X) \tag{1.10}$$

mit $p_a(X) = (-1)^2(\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1)$

Also ist

$$P(m) = \chi(X, \mathcal{O}_X(m)) = \frac{1}{2}(mH).(mH - K) + 1 + p_a(X) \tag{1.11}$$

Schreibt man

$$P(m) = \frac{1}{2}am^2 + bm + c \tag{1.12}$$

so ist $a = H.H$ (also auch $\deg X = a = H.H$) und $c = 1 + p_a(X)$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
b &= -\frac{1}{2}H.K = -\frac{1}{2}H.(H + K) + \frac{1}{2}H.H = \frac{1}{2}H.H - (\pi - 1) = \\
&= \frac{1}{2}H.H - \pi + 1 \quad (1.13)
\end{aligned}$$

wo π das Geschlecht einer nichtsingulären Kurve $H' \sim H$ ist und durch die Adjunktionsformel

$$2\pi - 2 = H.(H + K)$$

berechnet werden kann.

Es sei eine Kurve in X ein beliebiger effektiver Divisor von X . Nun sei C eine beliebige Kurve in X . Dann ist $\deg C = C.H$ wobei $\deg C$ der Grad von C als abgeschlossenes Unterschema von \mathbb{P}_k^n ist. Dieser ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C mit einem generischen $H' \sim H$ in \mathbb{P}_k^n . Diese Anzahl ist aber gerade $C.H$. (Das generische H' wird so gewählt, daß es transversal zu jedem Primdivisor Y in $C = \sum n_Y Y$ ist).

1.1.7 Hartshorne, Ex. V 1.3

Donnerstag, 5.3.2015

Der arithmetische Genus $p_a(D)$ eines projektiven Schemas der Dimension 1 ist $p_a(D) = 1 - \chi(D, \mathcal{O}_D)$.

(a) Für einen effektiven Divisor D auf einer Fläche X ist

$$2p_a(D) - 2 = D.(D + K) \quad (1.14)$$

Es ist $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$, also mit Beachtung von $\chi(D, \mathcal{O}_D) = 1 - p_a(D)$

$$\begin{aligned}
\chi(D, \mathcal{O}_D) &= \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X, \mathcal{O}_X(-D)) = \\
&= p_a(X) + 1 - \left(\frac{1}{2}(-D(-D - K)) + 1 + p_a(X) \right) = \\
&= -\frac{1}{2}(D.(D + K)) = 1 - p_a(D) \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Also

$$D.(D + K) = 2p_a(D) - 2 \quad (1.16)$$

wie verlangt.

(b) Da für $D' \sim D$ auch $D'.(D' + K) = D.(D + K)$ hängt $p_a(D)$ nur von der linearen Äquivalenzklasse von D ab.

(c) Definiere für einen beliebigen Divisor $p_a(D)$ durch

$$2p_a(D) - 2 = D.(D + K) \quad (1.17)$$

Dann gilt

$$p_a(-D) = D^2 - p_a(D) + 2 \quad (1.18)$$

Es ist ja

$$\begin{aligned}
 p_a(-D) &= \frac{1}{2}(-D \cdot (-D + K)) + 1 = \\
 &= \left(-\frac{1}{2}(D \cdot (D + K)) - 1 \right) + 2 + D^2 = -p_a(D) + 2 + D^2 \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$p_a(C + D) = p_a(C) + p_a(D) + C \cdot D - 1 \quad (1.20)$$

Es ist ja

$$\begin{aligned}
 2p_a(C + D) - 2 &= (C + D) \cdot (C + D + K) = \\
 &= (C \cdot C + K) + (D \cdot D + K) + (C \cdot D) + (D \cdot C) = \\
 &= 2p_a(C) - 2 + 2p_a(D) - 2 + 2(C \cdot D) \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Addieren von 2 und Division durch 2 ergibt die Behauptung.

1.1.8 Hartshorne, Ex. V 1.4

Donnerstag 5.3.2015

(a) Es sei X eine Fläche $X \subseteq \mathbb{P}_K^3$ vom Grad d . Die Fläche X enthalte eine Gerade $C = \mathbb{P}_k^1$. Dann gilt

$$C^2 = 2 - d \quad (1.22)$$

Es ist $g(C) = 0$ also nach der Adjunktionsformel $2 \cdot 0 - 2 = C \cdot (C + K)$, also $C \cdot C = -2 - C \cdot K$. Nun ist $\omega_{X|k} = \mathcal{O}_X(d - 3 - 1) = \mathcal{O}_X(d - 4) = (d - 4)H$ wobei H der sehr ample Divisor der Einbettung $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$.

Also ist $C \cdot K = (d - 4)(C \cdot H)$. Nach Aufgabe V, 1.2 ist $C \cdot H = \deg C = 1$. Also $C \cdot K = d - 4$ also $C \cdot C = -2 - C \cdot K = 2 - d$.

(b) Es sei $\text{char } k = 0$. Dann existiert für jedes $d \geq 1$ eine nichtsinguläre Fläche $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$ vom Grad $\deg X = d$, die die Gerade $x = y = 0$ enthält.

Es seien x, y, z, w die Koordinaten in \mathbb{P}_k^3 . Dann ist

$$X = V(x^d - y^d + z^d - w^d) \quad (1.23)$$

eine nichtsinguläre Fläche vom Grad d , die die Gerade $L = V(x - y, z - w)$ enthält. Durch einen Automorphismus aus $\text{Aut } \mathbb{P}_k^3 = \text{PGL}(3, k)$ wird L auf $x = y = 0$ abgebildet.

1.1.9 Hartshorne, Ex. V 1.5

Donnerstag 5.3.2015

(a) Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$ eine Fläche vom Grad d . Dann ist $\omega_{X|k} = \mathcal{O}_X(d - 3 - 1) = \mathcal{O}_X(d - 4)$. Also $K = (d - 4)H$, wobei K der kanonische Divisor und H der sehr ample Divisor der Einbettung $X \subseteq \mathbb{P}_k^3$ ist.

Es ist also

$$K^2 = (d - 4)^2 H \cdot H = (d - 4)^2 \deg X = d(d - 4)^2 \quad (1.24)$$

Die Gleichung $\deg X = H.H$ wurde in Ex. V 1.2 bewiesen.

(b) Es sei $X = C \times C'$ mit zwei nichtsingulären Kurven C, C' vom Geschlecht g, g' . Dann ist

$$K^2 = 2(2g - 2)(2g' - 2) = 8(g - 1)(g' - 1) \quad (1.25)$$

Es gilt mit $p_1 : X \rightarrow C$ und $p_2 : X \rightarrow C'$

$$\omega_{X|k} = p_1^* \Omega_{C|k} \otimes p_2^* \Omega_{C'|k} \quad (1.26)$$

Wir haben also als Divisor $K_X = (K_C \times C') + (C \times K_{C'})$. Wir schreiben die $K_C, K_{C'}$ als Differenzen effektiver, sehr ampler Divisoren D_2, D_1 auf C und D_4, D_3 auf C' :

$$K_C = D_2 - D_1 \quad (1.27)$$

$$K_{C'} = D_4 - D_3 \quad (1.28)$$

Also

$$K_X = ((D_2 - D_1) \times C') + (C \times (D_4 - D_3))$$

Nun ist $(D_i \times C).(D_j \times C) = 0$ und $(C \times D_i).(C \times D_j) = 0$. Weiterhin ist $(D_i \times C).(C \times D_j) = (\deg D_i)(\deg D_j) = d_i d_j$. Also ist

$$\begin{aligned} K_X.K_X &= \\ &= ((D_2 - D_1) \times C') + (C \times (D_4 - D_3)).((D_2 - D_1) \times C') + (C \times (D_4 - D_3)) = \\ &= (d_2 - d_1)(d_4 - d_3) + (d_4 - d_3)(d_2 - d_1) = \\ &= (2g - 2)(2g' - 2) + (2g' - 2)(2g - 2) = 8(g - 1)(g' - 1) \quad (1.29) \end{aligned}$$

Es bleibt noch $(D_1 \times C).(D_2 \times C') = 0$ für D_1, D_2 sehr ampler auf C zu zeigen. Analog gilt dann auch $(C \times D_1).(C \times D_2) = 0$ für D_1, D_2 sehr ampler auf C' . Insbesondere ist auch $(D \times C).(D \times C') = 0$ für D (sehr ampler) Divisor auf C .

Wähle also einen Divisor $D'_1 \sim D_1$, mit $\text{supp } D'_1 \cap \text{supp } D_2 = \emptyset$. Dies ist nach dem (erweiterten) Satz von Bertini möglich: Sei $i : C \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ die zu D_1 gehörige abgeschlossene Einbettung. Dann gibt es (viele) Hyperebenen $H \subseteq \mathbb{P}_k^n$ mit $H \cap C = D'_1$ und mit $H \cap D_2 = \emptyset$. Der Schnitt $H \cap C$ definiert den Divisor $D'_1 \sim D_1$.

Es ist dann

$$(D_1 \times C).(D_2 \times C') = (D'_1 \times C).(D_2 \times C') = 0.$$

1.1.10 Atiyah-Macdonald, Übungsaufgabe Mittwoch 18.3.2015

Es sei $A = k[x^2 - 1]$ und $B = k[x]$. Dann ist $B \supseteq A$ eine ganze Ringerweiterung. Weiter sei $\mathfrak{n} = (x - 1) \subseteq B$ ein maximales Ideal und $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$ ein ebenfalls maximales Ideal, das Bild von \mathfrak{n} .

Dann ist $B_{\mathfrak{n}} \supseteq A_{\mathfrak{m}}$ keine ganze Ringerweiterung. Genauer ist $1/(x+1) \in B_{\mathfrak{n}}$ nicht ganz über $A_{\mathfrak{m}}$. Zunächst ist $1/(x+1)$ wirklich in $B_{\mathfrak{n}}$, denn $x+1 \notin \mathfrak{n}$ da anderenfalls $x-1-(x+1) = -2 \in \mathfrak{n}$ und wir annehmen wollen, daß $\text{char } k \neq 2$ ist.

Sei also $1/(x+1)$ ganz über $A_{\mathfrak{m}}$. Dann haben wir eine Gleichung

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^n + \frac{a_1}{s} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s} = 0 \tag{1.30}$$

wo $a_i \in A$ und $s \in A$ mit $s \notin \mathfrak{m}$ ist. Multiplizieren mit $(x+1)^n$ und s ergibt

$$s + a_1(x+1) + \dots + a_n(x+1)^n = 0 \tag{1.31}$$

Es sei also $s = s(x^2-1) = z_0 + z_1(x^2-1) + z_2(x^2-1)^2 + \dots + z_d(x^2-1)^d$ mit $z_\nu \in k$. Da $x-1 \mid (x^2-1)$ ist $z_1(x^2-1) + \dots + z_d(x^2-1)^d \in \mathfrak{n}$ und auch in A , also in \mathfrak{m} . Da $s \notin \mathfrak{m}$ nach Annahme, ist $z_0 \neq 0$. Andererseits ist $s|_{x=-1} = 0$ wegen (1.31). Also müßte, wenn diese aus der Ganzheitsgleichung abgeleitete Beziehung gilt, wegen $(-1)^2 - 1 = 0$ auch $z_0 = 0$ sein. Dies steht aber im Widerspruch zu $z_0 \neq 0$ von eben. Also kann $1/(x+1)$ nicht ganz über $A_{\mathfrak{m}}$ sein.

1.1.11 Schnittprodukt von Divisoren auf einer Fläche Donnerstag 26.3.2015

Es sei X eine (projektive, nichtsinguläre) Fläche. Als Divisoren bezeichnen wir Cartierdivisoren auf X . Eine *Kurve* auf X ist ein effektiver Cartierdivisor.

Es gibt eine \mathbb{Z} -lineare Paarung

$$\text{Div } X \times \text{Div } X \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (C, D) \mapsto C.D \tag{1.32}$$

mit den Eigenschaften

i) Es gilt für Divisoren $C \sim C'$ und $D \sim D'$, daß

$$C.D \sim C'.D \tag{1.33}$$

$$C.D \sim C.D' \tag{1.34}$$

ii) Es ist

$$(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D \tag{1.35}$$

$$C.(D_1 + D_2) = C.D_1 + C.D_2 \tag{1.36}$$

iii) Es ist

$$C.D = D.C$$

iv) Es seien C, D zwei nichtsinguläre Divisoren, die sich transversal schneiden ($C \pitchfork D$): Dann ist $C.D = \#(C \cap D)$.

Lemma 1.1.1. *Es seien C_1, \dots, C_r irreduzible Kurven auf X und D ein sehr ample Divisor auf X . Dann gibt es ein irreduzibles, nichtsinguläres $D' \sim D$ mit $D' \not\cap C_i$.*

Lemma 1.1.2. *Es sei C ein irreduzibler nichtsingulärer Divisor und D eine Kurve, also ein effektiver Divisor auf X . Weiter sei $C \not\cap D$. Dann ist*

$$\#(C \cap D) = \deg \mathcal{O}_X(-D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C \quad (1.37)$$

Wir definieren das Schnittprodukt zuerst auf \mathcal{P} , den sehr ample Divisoren auf X . Diese bilden einen Kegel in $\text{Div } X$, d.h es ist für $D, D' \in \mathcal{P}$ auch $D + D' \in \mathcal{P}$.

Seien also C, D sehr ample Divisoren, dann wähle man ein $D' \sim D$ daß eine irreduzible, nichtsinguläre Kurve darstellt. Weiter wähle man ein $C' \sim C$, ebenfalls irreduzibel und nichtsingulär sowie $C' \not\cap D'$. Dann definiere man

$$C.D \stackrel{\text{def}}{=} C'.D' = \#(C' \cap D') \quad (1.38)$$

Es ist die Wohldefiniertheit zu zeigen. Es seien C'_1, C'_2 zwei zu D' transversale, irreduzible und nichtsinguläre Divisoren mit $C'_i \sim C$. Dann ist

$$C'_i.D' = \deg \mathcal{O}_X(-C'_i) \otimes \mathcal{O}_{D'} = r_i.$$

Da $\mathcal{O}_X(-C'_1) = \mathcal{O}_X(-C'_2)$ ist $r_1 = r_2$. Also hängt der Grad nicht von der Wahl von C' ab.

Seien weiter $C'' \sim C$ und $D'' \sim D$ irreduzible und nichtsinguläre Divisoren mit $C'' \not\cap D''$. Wähle nun einen Divisor $C_1 \sim C$, irreduzibel und nichtsingulär mit $C_1 \not\cap D'$ und $C_1 \not\cap D''$. Dann ist

$$C_1.D' = \deg \mathcal{O}_X(-D') \otimes \mathcal{O}_{C_1} = \deg \mathcal{O}_X(-D'') \otimes \mathcal{O}_{C_1} = C_1.D'' \quad (1.39)$$

Also ist

$$C''.D'' = C_1.D'' = C_1.D' = C'.D' \quad (1.40)$$

Damit ist $C.D$ wohldefiniert für $C, D \in \mathcal{P}$.

(i) Aufgrund der Konstruktion ist klar, daß für $C_1 \sim C_2$ und $D_1 \sim D_2$ mit $C_i, D_i \in \mathcal{P}$ auch $C_1.D_1 = C_2.D_2$ ist.

(iii) Weiterhin ist $C.D = D.C$ zu zeigen. Um $D.C$ nach obiger Vorschrift zu berechnen, ist zunächst ein irreduzibles nichtsinguläres $C' \sim C$ zu wählen und dann ein irreduzibles, nichtsinguläres $D' \sim D$ mit $D' \not\cap C'$. Dann ist $D.C = \#(C' \cap D')$. Dies sind aber genau dieselben Bedingungen an C', D' wie sie aus der Konstruktion für $C.D$ erwachsen. Also ist $C.D = D.C$.

(ii) Es bleibt $(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$ für $C_1, C_2, D \in \mathcal{P}$ zu zeigen. Es seien $D' \sim D$, $C'_i \sim C_i$ und $C_{12} \sim C_1 + C_2$ irreduzible nichtsinguläre Divisoren und $C'_i, C_{12} \not\cap D'$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 (C_1 + C_2).D &= \deg \mathcal{O}_X(-C_{12}) \otimes \mathcal{O}_{D'} = \deg \mathcal{O}_X(-(C_1 + C_2)) \otimes \mathcal{O}_{D'} = \\
 &\quad \deg \mathcal{O}_X(-C_1) \otimes \mathcal{O}_{D'} + \deg \mathcal{O}_X(-C_2) \otimes \mathcal{O}_{D'} = \\
 &= \deg \mathcal{O}_X(-C'_1) \otimes \mathcal{O}_{D'} + \deg \mathcal{O}_X(-C'_2) \otimes \mathcal{O}_{D'} = C_1.D + C_2.D \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

Nun dehnen wir das Schnittprodukt auf ganz $\text{Div } X$ aus. Sei nun $C \in \text{Div } X$ und H ein sehr ample Divisor auf X . Dann ist $C + nH$ von globalen Schnitten erzeugt und damit $C + (n+1)H$ ein sehr ample Divisor. Also ist $C = (C + (n+1)H) - (n+1)H$ eine Differenz sehr ample Divisoren.

Sind nun $C, D \in \text{Div } X$ gegeben, so schreiben wir

$$C \sim C_1 - C_2 \quad (1.42)$$

$$D \sim D_1 - D_2 \quad (1.43)$$

mit sehr ample Divisoren C_i, D_j .

Beachte, daß wir hier \sim und nicht $=$ verwenden, um zusammen mit der Wohldefiniertheit auch die Unabhängigkeit von $C.D$ von der linearen Äquivalenzklasse zu zeigen. Nun definieren wir

$$C.D \stackrel{\text{def}}{=} C_1.D_1 - C_2.D_1 - C_1.D_2 + C_2.D_2 \quad (1.44)$$

Sei

$$C \sim C'_1 - C'_2 \quad (1.45)$$

$$D \sim D'_1 - D'_2 \quad (1.46)$$

eine alternative Zerlegung. Dann ist

$$C_1 + C'_2 \sim C'_1 + C_2 \quad (1.47)$$

$$D_1 + D'_2 \sim D'_1 + D_2 \quad (1.48)$$

Aus diesen Beziehungen für sehr ample Divisoren und der oben gezeigten Bilinearität auf \mathcal{P} , sowie der Invarianz für lineare äquivalente Divisoren aus \mathcal{P} leiten wir die Gleichheit

$$\begin{aligned}
 C_1.D_1 - C_2.D_1 - C_1.D_2 + C_2.D_2 &= \\
 C'_1.D'_1 - C'_2.D'_1 - C'_1.D'_2 + C'_2.D'_2 &\quad (1.49)
 \end{aligned}$$

ab. Also ist $C.D$ für beliebige Divisoren wohldefiniert und es ist für $C' \sim C$ und $D' \sim D$ auch $C.D = C'.D'$.

Ebenso folgt $C.D = D.C$ aus der entsprechenden Beziehung für Divisoren aus \mathcal{P} .

Es bleibt noch $(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$ für beliebige Divisoren zu zeigen.

Zunächst ist $E.(F_1 - F_2) = E.F_1 - E.F_2$ sowie $E.(F_1 + F_2) = E.F_1 + E.F_2$ für E beliebigen Divisor und F_i sehr ample Divisoren.

Es sei $C_1 \sim C_{11} - C_{12}$ und $C_2 \sim C_{21} - C_{22}$ mit C_{ij} sehr ampel.
Dann ist

$$\begin{aligned}(C_1 + C_2).D &= (C_{11} - C_{12} + C_{21} - C_{22}).D = \\ &= (C_{11} + C_{21} - (C_{12} + C_{22})).D = \\ &= (C_{11} + C_{21}).D - (C_{12} + C_{22}).D \quad (1.50)\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}(C_{11} + C_{21}).D - (C_{12} + C_{22}).D &= \\ &= (C_{11}.D + C_{21}.D) - (C_{12}.D + C_{22}.D) = \\ &= (C_{11}.D - C_{12}.D) + (C_{21}.D - C_{22}.D) = \\ &= C_1.D + C_2.D \quad (1.51)\end{aligned}$$

1.1.12 Ein treuflacher Morphismus

Freitag 27.3.2015

Es sei $R = \mathbb{Z}_{(3)}$ und $A = R[A_2, A_4, A_6]$ sowie $A' = R[a_2, a_4]$. Betrachte den Morphismus

$$A \rightarrow A'[r] = C$$

der durch

$$A_2 \mapsto a_2 + 3r \quad (1.52)$$

$$A_4 \mapsto a_4 + 2a_2r + 3r^2 \quad (1.53)$$

$$A_6 \mapsto a_4r + a_2r^2 + r^3 \quad (1.54)$$

gegeben ist. Dieser Morphismus ist treuflach.

Es sei $B = R[A_2, A_4, r]$ und $\phi : B \rightarrow C$ gegeben durch $A_2 \mapsto a_2 + 3r$ und $A_4 \mapsto a_4 + 2a_2r + 3r^2$ sowie $r \mapsto r$.

Dann hat ϕ ein Inverses $\psi : C \rightarrow B$ gegeben durch $a_2 \mapsto A_2 - 3r$ und $a_4 \mapsto A_4 - 2rA_2 + 3r^2$ sowie $r \mapsto r$.

Weiter sei der Morphismus $\chi : A \rightarrow B$ gegeben durch $A_2 \mapsto A_2$, $A_4 \mapsto A_4$ und $A_6 \mapsto rA_4 - r^2A_2 + r^3$.

Dann ist die Abbildung $A \rightarrow A'[r] = C$ von oben gegeben durch $\phi \circ \chi$. Da ϕ das Inverse ψ hat, ist es nur nötig zu zeigen, daß χ treuflach ist.

Nun ist zunächst χ injektiv und $B \supseteq A$ ist eine ganze Ringerweiterung mit der Relation

$$r^3 - r^2A_2 + rA_4 - A_6 = 0$$

Also ist $B = A + Ar + Ar^2 \cong A^3$. Dies ist ein freier, also flacher, A -Modul. Da außerdem B/A ganz, ist die Abbildung $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ auch surjektiv, also auch B/A treuflach.

1.1.13 Eine rationale Kurve in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ Dienstag 14.4.2015

Betrachte den Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{Q}[x, y] \rightarrow \mathbb{Q}[t]$ mit $x \mapsto t^2 - t$ und $y \mapsto t^3 - t^2$. Der Kern $\ker \phi$ ist gleich $(x^3 + xy - y^2)$ wie man mit Macaulay 2 leicht ausrechnet.

Ist $\psi : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ die (flache) Basiserweiterung mit $-\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, so ist der Kern deshalb gleich $(x^3 + xy - y^2)\mathbb{C}[x, y]$. Da $x^3 + xy - y^2$ prim in $\mathbb{C}[x, y]$ ist $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^3 + xy - y^2)$ ein Integritätsring.

Man hat nun eine Abbildung: $\alpha : \mathbb{Q}(t) \rightarrow Q(A)$ mit $t \mapsto y/x$ für die mit $\psi' : Q(A) \rightarrow \mathbb{Q}(t)$ die Beziehung $\psi' \circ \alpha = \text{id}_{\mathbb{Q}(t)}$ gilt.

Auch umgekehrt ist $\alpha \circ \psi' = \text{id}_A$. Man hat nämlich die Abbildungen

$$x \mapsto t^2 - t \mapsto (y/x)^2 - (y/x) = (x^3 + xy)/x^2 - (y/x) = x \tag{1.55}$$

und

$$y \mapsto t^3 - t^2 \mapsto (y/x)^3 - (y/x)^2 = ((x^3 + xy)y)/x^3 - (y/x)^2 = y \tag{1.56}$$

Also ist $\mathbb{Q}(t)$ zu $Q(A)$ isomorph.

Weiterhin gilt: Das Bild $\psi(\mathbb{C}[x, y]) \subseteq \mathbb{C}[t]$ besteht genau aus den $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ für die $p(0) = p(1)$ ist.

Ein $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ mit $p(0) = p(1)$ wird durch α auf ein Element $g(x, y) \in A$ abgebildet, für das dann $\psi(g(x, y)) = p(t)$ ist.

Es gilt nämlich für die Abbildung α , daß

$$t^k \mapsto x g_k(x, y) + y h_k(x, y) + y/x.$$

Dies ist für $t \mapsto y/x$ trivial erfüllt und es sei für t^k bereits gezeigt.

Dann ist

$$\begin{aligned} t^{k+1} &= (y/x) (x g_k(x, y) + y h_k(x, y) + y/x) = \\ &= y g_k(x, y) + y^2/x h_k(x, y) + (y^2/x^2) = \\ &= y g_k(x, y) + (x^2 + y) h_k(x, y) + x + y/x = \\ &= x g_{k+1}(x, y) + y h_{k+1}(x, y) + y/x \end{aligned} \tag{1.57}$$

wie man unter Berücksichtigung von $x^3 + xy - y^2 = 0$ erkennt.

Also ist das Bild von $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ von der Form $q(x, y) + h$ mit $q(x, y)$ einem Polynom in A und $h = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (y/x)$. Ist nun $p(0) = p(1)$, so ist $a_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ also $a_1 + \dots + a_n = 0$, also auch $h = 0$.

1.1.14 Deformation in den Normalkegel Sonntag 26.4.2015

Es sei $W \hookrightarrow V$ eine abgeschlossene Immersion algebraischer k -Schemata.

Betrachte das Schema

$$\tilde{X} = \text{Bl}_{W \times 0}(V \times \mathbb{A}_k^1)$$

also die Aufblasung von $W \times 0$ in $V \times \mathbb{A}_k^1$. Dann definiert die Abbildung $\tilde{X} \rightarrow V \times \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ eine flache algebraische Familie von algebraischen Schemata zusammen mit einer abgeschlossenen Immersion $W \times \mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \tilde{X}$.

Diese Immersion ist für $T \neq 0$ gleich $W \hookrightarrow V$ und für $T = 0$ gleich $W \hookrightarrow C_W V$, also gleich der Immersion in den Nullschnitt des affinen Normalkegels $C_W V = \text{Spec}(C)$ mit

$$C = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d / \mathcal{J}^{d+1}$$

und $V(\mathcal{J}) = W$.

Wir wollen dies für $V = \text{Spec}(A)$ und $W = \text{Spec}(A/I)$ und $V \times \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(A[T])$ direkt sehen.

Es ist dann

$$\tilde{X} = \text{proj}(B) = \text{proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} (I, T)^d\right)$$

Die Abbildung $W \times \mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \tilde{X}$ wird durch den Morphismus $B_0 = A[T] \rightarrow A/I[T]$ vermittelt.

Man beachte, daß es in B zwei Elemente T gibt, einmal $T \in B_0 = A[T]$ und einmal $T \in B_1 = IA[T] + TA[T]$. Wir schreiben auch Te_1 für das zweite T . Es ist dann

$$\begin{aligned} BTe_1 &= 0 \oplus TA[T] \oplus TIA[T] + T^2A[T] \oplus \\ &\quad \oplus TI^2A[T] + T^2IA[T] + T^3A[T] \oplus \dots \end{aligned} \quad (1.58)$$

also

$$B/(Te_1B) = A[T] \oplus I \oplus I^2 \oplus I^3 \dots = A[T] \oplus \bigoplus_{d > 0} I^d$$

Dabei wirkt $A[T]$ durch $A[T] \rightarrow A$ mit $T \mapsto 0$ auf den $(B/(Te_1B))_d$ für $d > 0$. also ist letztlich

$$\text{proj}(B/(Te_1B)) = \text{proj}(A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots)$$

Die Faser von \tilde{X} über $T = 0$ wird durch $B' = B/TB$ (mit $T \in B_0$) gegeben, also durch

$$X^a = \text{proj}(B') = \text{proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} (I, T)^d / (T(I, T)^d)\right) = \text{proj}\left(\bigoplus_d J_d\right)$$

Man rechnet aus, daß

$$J_d = (I, T)^d / (T(I, T)^d) = I^d + TI^{d-1}/I^d + T^2I^{d-2}/I^{d-1} + \dots + T^dA/I \quad (1.59)$$

Man kann X^a dann in zwei Komponenten zerlegen, nämlich in $\text{Bl}_W V$ und $\text{Proj}(C \oplus 1)$ die sich in $\text{Proj}(C)$, dem projektiven Tangentialkegel schneiden.

Betrachte die Komponenten

$$J'_d = TI^{d-1}/I^d + T^2I^{d-2}/I^{d-1} + \dots + T^dA/I$$

des B' -Ideals J' . Dann ist $V(J') = \text{proj}(B'/J') = \text{proj}(\bigoplus_d I^d) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Y}$, also ist $V(J')$ in $\text{proj}(B')$ gleich $\text{Bl}_W V = \text{Bl}_I A$.

Es ist weiterhin nach obigem $\tilde{Y} = \text{proj}(B'/J') = \text{proj}(B/(Te_1)B)$. Also ist das Komplement von \tilde{Y} in \tilde{X} gleich $\text{Spec}(B_{(Te_1)})$. Dies ist aber gleich dem Spektrum $\text{Spec}(B'')$ der *Gerstenhaber-Algebra*

$$B'' = \dots \oplus I^n T^{-n} \oplus I^{n-1} T^{-n+1} \oplus \dots \oplus IT^{-1} \oplus A \oplus AT \oplus AT^2 \oplus \dots$$

Als nächstes betrachte die Komponenten ($I \subseteq B'_0$)

$$J''_d = IJ_d = I^{d+1}$$

des B' -Ideals J'' , das den Quotientenring B'/IB' definiert. Dann ist

$$B'/J'' = \bigoplus_d I^d/I^{d+1} + TI^{d-1}/I^d + T^2I^{d-2}/I^{d-1} + \dots + T^dA/I$$

also $V(J'') = V(IB') = \text{proj}(C[T]) = \text{Proj}(C \oplus 1)$.

Man beachte, daß dies gleich dem projektiven Kegel

$$\text{proj}\left(\bigoplus_d (I, T)^d / (I, T)^{d+1}\right)$$

also dem strikten Urbild von $W \times 0$ in \tilde{X} unter der Projektion $\tilde{X} \rightarrow V \times \mathbb{A}_k^1$ ist.

Schneiden wir nun diese beiden Verschwindungsmengen, bilden also das Ideal $J' + J'' = J'''$, so ist $V(J''') = \text{proj}(B/J''') = \text{proj}(\bigoplus_d J_d/(J'''_d))$. Nun ist

$$J_d/(J'_d + J''_d) = I^d/I^{d+1}$$

also $\text{proj}(B/J''') = \text{proj}(\bigoplus_d I^d/I^{d+1})$ gleich dem projektiven Normalkegel $\text{Proj}(C) = \text{Proj}(C_W V)$.

**1.1.15 Berechnung der Kohomologie kohärenter Garben auf \mathbb{P}_A^n
Samstag, 9.5.2015**

Es sei $X = \mathbb{P}_A^n$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring A . Dann ist $\mathcal{F} \rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$ ein kovarianter rechtsexakter Funktor auf der Kategorie der kohärenten Garben auf X . Man nenne nun $G_p(\mathcal{F}) = H^{n-p}(X, \mathcal{F})$.

Ich behaupte, daß (G_p) ein universeller δ -Funktor über $G_0(-) = H^n(X, -)$ ist.

Man lese einfach die lange exakte Kohomologiesequenz zu $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$, also

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

von rechts nach links.

Weiterhin ist G_p auslöschbar, denn für \mathcal{F} kohärent existiert eine Surjektion $\bigoplus_i \mathcal{O}_X(-d_i) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ mit $d_i > 0$. Nun ist aber $G_p(\mathcal{O}_X(-d_i)) = H^{n-p}(X, \mathcal{O}_X(-d_i)) = 0$ für $p > 0$, weil $d_i > 0$.

Also ist $\mathcal{M} = \bigoplus_i \mathcal{O}_X(-d_i) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ eine Auslöschung von \mathcal{F} .

Nenne nun $S = A[X_0, \dots, X_n]$, also $X = \text{proj}(S)$

Anmerkung 1.1.1. Ist $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für einen endlich erzeugten S -Modul M , so existiert immer eine Surjektion $\bigoplus_i S(-d_i) \rightarrow M' \rightarrow 0$, mit $d_i > 0$, wo $M' = M_{\geq r} = M_r \oplus M_{r+1} \oplus \dots$ ein Modul ist, der mit M ab einem gewissen Grad (hier r) in den homogenen Komponenten übereinstimmt.

Es ist dann auch $\mathcal{F} = \widetilde{M} = \widetilde{M}'$.

Finde nun für \mathcal{F} eine Sequenz von Garben $\mathcal{N}_i = \bigoplus_j \mathcal{O}_X(-d_{ij})$ mit exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_i \rightarrow \mathcal{N}_i \rightarrow \mathcal{B}_{i-1} \rightarrow 0 \quad (1.61)$$

wobei $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{-1}$ und $\mathcal{B}_i = \mathcal{Z}_i$ ist.

Diese Sequenz wird iterativ konstruiert: Ist $\mathcal{Z}_i = \mathcal{B}_i$ schon bekannt, so wählt man (nach dem Verfahren in der Anmerkung) eine Surjektion

$$\mathcal{N}_{i+1} = \bigoplus_j \mathcal{O}_X(-d_{i+1,j}) \rightarrow \mathcal{B}_i \rightarrow 0 \quad (1.62)$$

deren Kern dann gleich $\mathcal{Z}_{i+1} = \mathcal{B}_{i+1}$ ist.

Anmerkung 1.1.2. Hier ist eine zweite Anmerkung am Platz: Ist

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_{i+1} \rightarrow \mathcal{N}_{i+1} = \bigoplus_j S(-d_{i+1,j}) \rightarrow \mathcal{N}_i = \bigoplus_j S(-d_{i,j})$$

gegeben mit $d_{i+1,j} > 0$, so ist in einer Surjektion

$$\bigoplus_j S(-d_{i+2,j}) = \mathcal{N}_{i+2} \rightarrow \mathcal{Z}_{i+1} \rightarrow 0$$

automatisch $d_{i+2,j} > 0$. Dies folgt aus $\text{Hom}_S(S(-d), S(-e)) = 0$ für $d < e$.

Wir brauchen hier also auf Modulebene nicht mehr trunkieren, wie am Anfang der Sequenz.

Zusammen hat man

$$\cdots \rightarrow \mathcal{N}_i \rightarrow \mathcal{N}_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 \quad (1.63)$$

wo $\mathcal{N}_i = \bigoplus_j \mathcal{O}_X(-d_{ij})$.

Dies ist ein Komplex über \mathcal{F} mit für G_p azyklischen Garben \mathcal{N}_i . Also ist

$$H^{n-p}(X, \mathcal{F}) = G_p(\mathcal{F}) = h_p(G_0(\mathcal{N}_\bullet)) \quad (1.64)$$

Nun ist aber $G_0(\mathcal{N}_i) = H^n(X, \mathcal{N}_i) = \bigoplus_j H^n(X, \mathcal{O}_X(-d_{ij}))$ ein freier, endlich erzeugter und konkret berechenbarer A -Modul (wenn man in A konkret rechnen kann).

Also kann auch $h^p(G_0(\mathcal{N}_\bullet))$ konkret als endlich präsentierter A -Modul ausgerechnet werden.

Aufgrund des Dualitätssatzes für X ist ja

$$\begin{aligned} H^n(X, \mathcal{N}_i) &= \text{Hom}_A(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}_i, \mathcal{O}_X(-n-1)), A) = \\ &= \text{Hom}_A(\text{Hom}_S(\mathcal{N}_i, S(-n-1))_0, A) = F_i \end{aligned} \quad (1.65)$$

und noch einmal in anderen Worten

$$H^{n-p}(X, \mathcal{F}) = h_p(\text{Hom}_A(\text{Hom}_S(\mathcal{N}_\bullet, S(-n-1))_0, A)) \quad (1.66)$$

Die Abbildungen $d_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ gehen aus den Abbildungen $\mathcal{N}_i \rightarrow \mathcal{N}_{i-1}$ hervor, die bei der Konstruktion der \mathcal{N}_i benutzt wurden.

Damit ist $H^{n-p}(X, \mathcal{F})$ für $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ mit M endlich erzeugter S -Modul konkret berechenbar.

```
--
-- compute the H^i(proj S, moM~) for S=A[x_1,...,x_n]
--

compCohX = (moM, d) ->
(
S := ring moM;
A := coefficientRing S;
n := numgens S;
moMt := truncate(d, moM);
-- the number 10 must be chosen accordingly with n
C := presX (moMt, 10);
C1 := Hom(C, S^{-n});
Dlis := {};
for i from min(C1) to max (C1) do
(
Dlis = prepend( transpose lift(matrix basis(0, C1.dd_(i)), A), Dlis);
);
```

```

D:= chainComplex(Dlis);
D, C, prune HH(D)
);

--
-- compute a free resolution of moM with S(-d_{i,1}) + .. + S(-d_{i,j_i}) terms
--

presX = (moM, k) ->
(
moN := moM;
philis := {};
moN = prune moN;
i := 0;
phi := presentation moN;
degs := degrees target phi;
print degs;
philis = append(philis, phi);
moN = ker phi;
while ((prune moN) != 0) and (i <= k) do
(
phi = presentation moN;
psi := gens moN;
philis = append(philis, psi);
philis = append(philis, phi);
moN = ker phi;
i = i + 1;
);
D := chainComplex(philis);
return D;
);

```

1.1.16 Berechnung von Syzygienmoduln

Samstag, 9.5.2015

Es sei S ein kommutativer Ring, so daß in freien S -Moduln $M = S^r$ eine Berechnung von Gröbnerbasen möglich ist.

Das heißt für einen Satz $z_1, \dots, z_n \in S^r$ kann man $z'_1, \dots, z'_l \in S^r$ berechnen, so daß $N = Sz_1 + \dots + Sz_n = Sz'_1 + \dots + Sz'_l$ und $z \in S^r$ ist genau dann in N , wenn es sich mit z'_1, \dots, z'_l zu Null reduzieren läßt.

Es sei nun

$$A : \sum_{i=1}^r Se_i \rightarrow \sum_{j=1}^s Sf_j$$

eine lineare Abbildung mit

$$A(e_i) = \sum_j a_{ij} f_j$$

Es sei M der Kern von A , also $0 \rightarrow M \rightarrow S^r \rightarrow S^s$ exakt. Gesucht ist eine Gröbnerbasis von M . Betrachte dazu den freien S -Modul $X = \sum_i S e_i + \sum_j S f_j$ und den von

$$z_i = e_i - \sum_j a_{ij} f_j$$

für $i = 1, \dots, r$ erzeugten Untermodul $W \subseteq X$. Berechne zu den z_1, \dots, z_r eine Gröbnerbasis in einer Termordnung die f_j zugunsten von e_i eliminiert. Wähle dann die Elemente $h_1, \dots, h_m \in W \cap \sum_i S e_i \subseteq X$ aus der Gröbnerbasis, also diejenigen, die nur e_i enthalten.

Diese liegen alle im Kern, es ist ja für $h = h_\nu$:

$$(*) \quad h = \sum_i y_i e_i = \sum_i x_i (e_i - \sum_j a_{ij} f_j)$$

also $y_i = x_i$ und $\sum_j \sum_i (x_i a_{ij}) f_j = 0$, also $A(\sum x_i e_i) = A(h) = 0$.

Liest man diese Folgerungen rückwärts, so erkennt man, daß ein $h \in S^r$ mit $A(h) = 0$ im Untermodul W liegt, also eine Darstellung $(*)$ existiert. Damit ist dann aber auch eine Darstellung $h = \sum_{\nu=1}^m y_\nu h_\nu$ mit den Elementen der Gröbnerbasis von $W \cap S^r$ möglich.

Also ist $\phi : \sum_{k=1}^m S e_k \rightarrow M$ mit $e_k \mapsto h_k$ eine darstellende Surjektion.

**1.1.17 Periodische Kettenbrüche und quadratische Irrationalitäten
Montag, 17.8.2015**

Es sei x_1 eine *quadratische Irrationalität*, also eine Nullstelle eines Polynoms $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Die Kettenbruchentwicklung einer Zahl $w \in \mathbb{R}$ sei mit $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ abgekürzt, was für

$$w = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

stehe. Es gilt dann

Theorem 1.1.1. *Ist x eine quadratische Irrationalität, so ist*

$$x = \langle a_0, a_1, \dots, a_r, \overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+p}} \rangle$$

wobei $\overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+p}}$ für die unendliche, periodische Wiederholung von a_{r+1}, \dots, a_{r+p} steht.

Man beweist dies wie folgt: Es sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein quadratisches Polynom. Es sei dann für ein $n \in \mathbb{Z}$ das Polynom $f'(x') = a'x'^2 + b'x' + c'$ gegeben durch die Beziehung

$$f(n + 1/x')x'^2 = f(x') \quad (1.67)$$

Dies bedeutet im einzelnen für die Koeffizienten

$$a' = an^2 + bn + c \quad (1.68)$$

$$b' = b + 2an \quad (1.69)$$

$$c' = a \quad (1.70)$$

Nennt man $\Delta = b^2 - 4ac$ die *Diskriminante* von $f(x)$, so ist

$$\Delta' = b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac = \Delta \quad (1.71)$$

Wir nennen $f'(x')$ eine *elementare Umbildung von $f(x)$* .

Es sei nun x_1 eine Nullstelle von $f(x)$ und x_2 die zugehörige konjugierte Nullstelle. Wir schließen den Fall $x_1 \in \mathbb{Z}$ aus und nennen $n \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl mit $n < x_1$. Es sind nun $x'_1 = \frac{1}{x_1 - n}$ und $x'_2 = \frac{1}{x_2 - n}$ die zu x_1 und x_2 gehörigen Nullstellen der elementaren Umbildung $f'(x')$. Es gilt dann

$$x_1 = n + 1/x'_1 \quad (1.72)$$

Man erkennt daraus sofort, wie man durch Aufsuchen einer Kette von elementaren Umbildungen von $f(x)$ zu einer Kettenbruchentwicklung von x_1 gelangt.

Diese Kette von elementaren Umbildungen von $f(x) = f_0(x)$ sei

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$$

Wir zeigen, daß in $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ die $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ stets kleiner als ein festes Maximum M sind.

Ist $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, so ist $\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2$, also

$$a^2 = \frac{\Delta}{(x_1 - x_2)^2} \quad (1.73)$$

Wir werden zeigen, daß stets

$$|x_{1,i+1} - x_{2,i+1}| > \min(1, |x_{1,i} - x_{2,i}|) \quad (1.74)$$

für alle $i \gg 0$ sein muß. Es ist also

$$|a_i| \leq M'$$

für alle i und ein geeignetes $M' > 0$.

Weiterhin ist $c_i = a_{i-1} \leq M'$. Aus

$$b^2 = 4ac + \Delta$$

folgt dann die Existenz eines $M > 0$ mit $|a_i|, |b_i|, |c_i| < M$. Es können also überhaupt nur endlich viele $f_i(x)$ auftreten.

Damit können wir nun zeigen, daß die Folge der n_i schließlich periodisch wird. Dies geschieht durch Untersuchung nach welchen Regeln die $x_{1,i}, x_{2,i}$ in $x_{1,i+1}, x_{2,i+1}$ übergehen.

Es bleibt also, die gegenseitige Lage der x_1, x_2 und ihrer elementaren Umbildungen x'_1, x'_2 zu untersuchen und die Beziehung

$$|x'_1 - x'_2| > \min(1, |x_1 - x_2|) \quad (1.75)$$

für alle genügend großen i in obiger Folge $f_i(x)$ zu zeigen.

Es sei n die größte ganze Zahl mit $n \leq x_1$. Dann können x_1, x_2, n folgende Lagen einnehmen:

- a) $n < x_1 < x_2 < n + 1$
- b) $n < x_2 < x_1 < n + 1$
- c) $n < x_1 < n + 1 < x_2$
- d) $0 < x_2 < 1 \leq n < x_1$
- e) $x_2 < n < x_1 < n + 1$
- f) $x_2 < 0 < n < x_1$

Als Übergänge können auftreten: (a) nach (b), (a) nach (e), (b) nach (a), (b) nach (c), (c) nach (d), (d) nach (f), (e) nach (f), (f) nach (f). Beim Übergang (b) nach (a) oder umgekehrt ist offenbar $|x'_1 - x'_2| > |x_1 - x_2|$. Pendelt die Folge der $(x_{1,i}, x_{2,i})$ nicht ständig zwischen (a) und (b) hin und her, so mündet sie zwangsläufig in (f) und es ist dann stets $|x_1 - x_2| > 1$.

Es gibt also genau zwei Arten von Folgen $x_{1,i}, x_{2,i}$: Solche die periodisch zwischen (a) und (b) pendeln und solche, die nach (f) münden. Im letzteren Fall ist $x_{1,i}$ immer die einzige positive, also die maximale, Nullstelle von $f_i(x)$ und wird deshalb mit $f_i(x)$, das nur endlich viele verschiedene Formen annehmen kann, periodisch.

Im Falle ständigen Alternierens zwischen (a) und (b) wird das Paar $(f_i(x), t_i)$ wobei $t_i = 0$ für Zustand (a) und $t_i = 1$ für Zustand (b) stehe, auch periodisch, mithin ist auch hier $x_{1,i}$ und damit n_i eine ultimativ periodische Folge.

1.1.18 Summen dualer Isogenien

Samstag, 16.4.2016

Es sei E/k eine elliptische Kurve über dem Körper k . Weiter sei

$$\mu : E \times_k E \rightarrow E \quad (1.76)$$

der Morphismus der Addition auf der elliptischen Kurve.

Es seien $p_1, p_2 : E \times_k E \rightarrow E$ die kanonischen Projektionen auf den ersten und zweiten Faktor und es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ das Linienbündel auf E zu einem Divisor D auf E vom Grad $\deg D = 0$.

Es ist also

$$\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(E) \tag{1.77}$$

Dann gilt die Beziehung

$$\mu^* \mathcal{L} = p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \tag{1.78}$$

Wir zeigen zunächst, daß $\mu^* \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L})^{-1}$ auf den Fasern $p_2^{-1}(P) = E \times P$ für einen Punkt $P \in E$ immer trivial ist, also

$$(\mu^* \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L})^{-1})|_{E \times P} \cong \mathcal{O}_{E \times P} \tag{1.79}$$

ist.

Es ist nämlich $\mu^* \mathcal{L}|_{E \times P} \cong \tau_P^* \mathcal{L}|_E$, wobei $\tau_P : E \rightarrow E$ die Abbildung $Q \mapsto P + Q$ ist.

Weiterhin ist $(p_1^* \mathcal{L})|_{E \times P} \cong \mathcal{L}|_E$. Nun ist aber der Divisor D , der zu \mathcal{L} gehört vom Grad 0, also

$$D = \sum_i n_i P_i, \quad \sum_i n_i = 0 \tag{1.80}$$

Damit ist $\tau_P^*(D) = \sum_i n_i (P_i - P) \sim \sum_i n_i P_i = D$. Also ist $\tau_P^* \mathcal{L} = \mathcal{L}$ auf E und damit $(\mu^* \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L})^{-1})|_{E \times P} = \mathcal{O}_{E \times P}$ wie behauptet.

Nach den Halbstetigkeitssätzen ist dann

$$\mu^* \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L})^{-1} = p_2^* \mathcal{N} \tag{1.81}$$

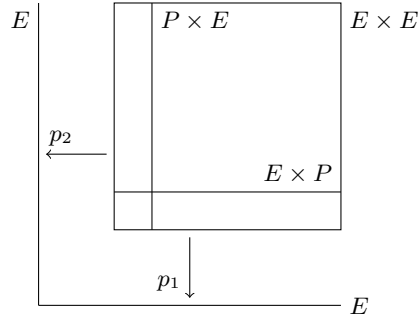
mit einem zunächst unbekanntem Linienbündel \mathcal{N} auf E .

Wir betrachten nun $(p_2^* \mathcal{N})|_{P \times E}$. Es ist $\mu^* \mathcal{L}|_{P \times E} = \tau_P^* \mathcal{L}|_E = \mathcal{L}|_E = p_2^* \mathcal{L}|_{P \times E}$. Weiter ist $p_1^* \mathcal{L}|_{P \times E} = \mathcal{O}_{P \times E}$, da $p_1^{-1}(P) = P \times E$ ist. Also ist $p_2^* \mathcal{N}|_{P \times E} = p_2^* \mathcal{L}|_{P \times E}$ für alle $P \in E$ und damit

$$\mu^* \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L})^{-1} = p_2^* \mathcal{L} \tag{1.82}$$

was offensichtlich äquivalent zur Behauptung ist.

Siehe zur Veranschaulichung der einzelnen Abbildungen und Einschränkungen auf die Fasern auch das folgende Bild:



1.1.19 Display einer Monade

Donnerstag, 09.06.2016

Es sei $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ und \mathcal{F} ein stabiles Vektorbündel auf X vom Rang 2. Es sei $c_1(\mathcal{F})$ ungerade.

Durch Tensorieren mit einem geeigneten Linienbündel $\mathcal{O}_X(k)$ sei $c_1(\mathcal{F}) = -1$ gesetzt. Es ist dann $c_2(\mathcal{F}) \geq 1$.

Lemma 1.1.3. *Es seien \mathcal{F} ein Vektorbündel auf X mit $H^1(\mathcal{F}(j)) = H^1(U^p(j))$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.*

Dann ist $\mathcal{F} = U^p \oplus \mathcal{L}$ mit \mathcal{L} einer Summe von Linienbündeln.

Lemma 1.1.4. *Ist $c_1(\mathcal{F}) = -1$, so ist wegen Serre-Dualität*

$$H^j(\mathcal{F}(i)) = H^{2-j}(\mathcal{F}(-i-2)) \tag{1.83}$$

Definition 1.1.1. *Ein Vektorbündel \mathcal{F} auf X heißt normalisiert, wenn $c_1(\mathcal{F})$ gleich 0 oder gleich -1 ist.*

Lemma 1.1.5. *Ein normalisiertes Vektorbündel \mathcal{F} ist genau dann stabil, wenn \mathcal{F} keine globalen Schnitte hat.*

Es ist dann notwendigerweise

$$H^0(\mathcal{F}(-i)) = 0, \text{ für } i \geq 0$$

und wegen $H^2(\mathcal{F}(i-2)) = H^0(\mathcal{F}(-i))$ auch

$$H^2(\mathcal{F}(i-2)) = 0, \text{ für } i \geq 0$$

Wir haben folgende Tafel für die Ränge der Kohomologien $h^j(\mathcal{F}(i))$:

j			
2			
1	$c_2 - 1$	c_2	$c_2 - 1$
0			
	-2	-1	0
	i		

Dieser Kohomologietafel entspricht die Monade

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes U^2 \rightarrow H^1(\mathcal{F}(-1)) \otimes U \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \tag{1.84}$$

Das Display der Monade ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{W} & \rightarrow & \mathcal{H} & \rightarrow & \mathcal{F} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{W} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} & \rightarrow & \mathcal{G} \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \beta & & \downarrow & \\
 & & & & H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{=} & H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & 0 & & 0 &
 \end{array} \tag{1.85}$$

mit

$$\mathcal{W} = H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes U^2 \quad (1.86)$$

Lemma 1.1.6. *Der Modul $H^1_{\geq 0}(\mathcal{F})$ ist mit $S = H^0_{\geq 0}(\mathcal{O}_X)$ als S -Modul von $H^1(\mathcal{F})$ erzeugt.*

Beweis. Betrachte die Koszulauflösung eines abgeschlossenen Punktes $P \in X$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(-2) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x' \\ x \end{pmatrix}} & \mathcal{O}_X(-1) \oplus \mathcal{O}_X(-1) & \xrightarrow{(x, x')} & \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & & & \mathcal{J}_P & \\
 & & & & \nearrow & \searrow & \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array} \quad (1.87)$$

Exaktes Tensorieren mit $\mathcal{F}(i+1)$ gibt

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(i+1) \otimes \mathcal{J}_P \rightarrow \mathcal{F}(i+1) \rightarrow \mathcal{F}(i+1) \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow 0 \quad (1.88)$$

und damit eine Surjektion

$$H^1(\mathcal{F}(i+1) \otimes \mathcal{J}_P) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(i+1)) \rightarrow 0.$$

Der vorige Ausschnitt aus der Koszulauflösung tensoriert mit $\mathcal{F}(i+1)$ liefert

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(i-1) \rightarrow 2\mathcal{F}(i) \rightarrow \mathcal{F}(i+1) \otimes \mathcal{J}_P \rightarrow 0 \quad (1.89)$$

Da $H^2(\mathcal{F}(i-1)) = 0$ hat man eine Surjektion

$$2H^1(\mathcal{F}(i)) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(i+1) \otimes \mathcal{J}_P) \rightarrow 0$$

Zusammen mit der vorigen Surjektion ergibt dies

$$2H^1(\mathcal{F}(i)) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(i+1)) \rightarrow 0$$

Anmerkung 1.1.3. Ist nun $c_2 = 1$, so ist $H^1(\mathcal{F}) = 0$ und damit $H^1(\mathcal{F}(i)) = 0$ für alle $i \geq 0$.

Wegen Serre-Dualität ist $H^1(\mathcal{F}(i)) = H^1(\mathcal{F}(-i-2))$. Also ist auch $H^1(\mathcal{F}(i)) = 0$ für $i \leq -2$. Es ist somit nur $H^1(\mathcal{F}(-1)) \neq 0$ mit Dimension 1.

Damit hat \mathcal{F} den Rang 2 und nur die mittlere Kohomologie $h^1(\mathcal{F}(-1)) = 1$. Es gleicht in diesen Daten dem Vektorbündel $U = \Omega_{X|k}(1)$ und ist diesem daher nach einem früheren Satz über Vektorbündel gleich.

Wir nehmen nun $c_2 \geq 2$ an und steuern auf die schrittweise Konstruktion der obigen Monade zu:

Konstruktion von \mathcal{G}

Zunächst definieren wir die Erweiterung des Endterms der Monade mit \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) &= \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \otimes H^1(\mathcal{F})^\vee = \\ &= H^1(\mathcal{F}) \otimes H^1(\mathcal{F})^\vee = \text{Hom}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F})) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.90)$$

Die gesuchte Erweiterung \mathcal{G} entspricht in $\text{Ext}^1(H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ dem ausgezeichneten Element $\text{id}_{H^1(\mathcal{F})}$ in $\text{Hom}(H^1(\mathcal{F}), H^1(\mathcal{F}))$. Wir haben also die Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (1.91)$$

die rechts senkrecht in obigem Display steht. Die Garbe \mathcal{G} ist ein Vektorbündel, da $H^1(\mathcal{G}(i)) = 0$ für $i \ll 0$ ist.

Konstruktion von \mathcal{H}

Als nächstes betrachten wir die Erweiterung von \mathcal{F} mit

$$\mathcal{W} = H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes U^2 = H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes \omega_X(2)$$

dem Anfangsterm der Monade.

Es ist

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{W}) &= \text{Ext}^1(\mathcal{F}(-2), \omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) = \\ &= H^1(\mathcal{F}(-2))^\vee \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) = \text{Hom}(H^1(\mathcal{F}(-2)), H^1(\mathcal{F}(-2))) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.92)$$

und \mathcal{H} entspricht wie oben dem ausgezeichneten Element $\text{id}_{H^1(\mathcal{F}(-2))}$ in $\text{Hom}(H^1(\mathcal{F}(-2)), H^1(\mathcal{F}(-2)))$.

Wir haben so die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 \quad (1.93)$$

die sich ganz oben waagrecht im Display befindet.

Konstruktion von \mathcal{B}

Lemma 1.1.7. *Es ist*

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{W}) = \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{W}) = \text{Hom}(H^1(\mathcal{F}(-2)), H^1(\mathcal{F}(-2)))$$

Beweis. Wir nehmen jetzt nochmal die Erweiterungssequenz von oben:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Anwenden von $\text{Hom}(-, \mathcal{W})$ und Bilden der Ext-Sequenz liefert

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{W}) \otimes H^1(\mathcal{F}) &\rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{W}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{W}) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X, \mathcal{W}) \otimes H^1(\mathcal{F}) \end{aligned} \quad (1.94)$$

Es ist

$$\mathrm{Ext}^j(\mathcal{O}_X, \mathcal{W}) = \mathrm{Ext}^j(\mathcal{O}_X(-2), \omega_X) = H^{2-j}(\mathcal{O}_X(-2))^\vee \quad (1.95)$$

Also verschwindet der Anfangs- und der Endterm in der Sequenz (1.94) und es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{W}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{W}) &= H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(-2), \omega_X) = \\ &= H^1(\mathcal{F}(-2)) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2))^\vee \neq 0 \end{aligned} \quad (1.96)$$

Damit definiert das Element $u_{\mathcal{H}}$ in $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{W})$, das \mathcal{H} entspricht, ein Element $u_{\mathcal{B}}$ in $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{W})$, das zu einer Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

gehört.

Konstruktion von $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$

Wir wollen jetzt eine Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$ wie im Display vorhanden konstruieren. Wir beginnen mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.97)$$

Wir entnehmen die Sequenz

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{W}) \quad (1.98)$$

Lemma 1.1.8. *Es ist $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{W}) = 0$.*

Beweis. Es ist

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{W}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}(-2), \omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) \quad (1.99)$$

und

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}(-2), \omega_X) = H^1(\mathcal{H}(-2))^\vee = 0 \quad (1.100)$$

Lemma 1.1.9. *Es ist $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{W}) = 0$.*

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{W}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{H}(-2), \omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) \quad (1.101)$$

und

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}(-2), \omega_X) = H^2(\mathcal{H}(-2))^\vee \quad (1.102)$$

Nun ist aber

$$0 \rightarrow \mathcal{W}(-2) \rightarrow \mathcal{H}(-2) \rightarrow \mathcal{F}(-2) \rightarrow 0$$

exakt und $H^2(\mathcal{F}(-2)) = 0$. Weiterhin ist

$$H^2(\mathcal{W}(-2)) = H^2(\omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) = H^1(\mathcal{F}(-2))$$

und

$$H^1(\mathcal{H}(-2)) = 0$$

Damit ist $H^1(\mathcal{F}(-2)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{W}(-2))$ und wegen $H^2(\mathcal{F}(-2)) = 0$ auch $H^2(\mathcal{H}(-2)) = 0$.

Es ist also $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{W}) = 0$ und die Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ aus obigem Diagramm erweitert sich *eindeutig* zu einer Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$, die das Quadrat ganz rechts im Diagramm kommutieren läßt.

Gleichzeitig wird eine Abbildung $i : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ induziert, von der wir zeigen müssen, daß es sich um die Identität handelt.

Lemma 1.1.10. *Es ist $H^1(\mathcal{B}(j)) = H^1(\mathcal{B}(-j-2)) = 0$ für $j \geq 0$ und es ist $H^1(\mathcal{B}(-1)) = H^1(\mathcal{F}(-1))$.*

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus der Serre-Dualität. Aus $0 \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ entnehmen wir

$$H^1(\mathcal{W}(j)) \rightarrow H^1(\mathcal{B}(j)) \rightarrow H^1(\mathcal{G}(j)) \rightarrow H^2(\mathcal{W}(j))$$

Der Term ganz links verschwindet für alle j , da $H^1(U^2(j)) = 0$ für alle j . Weiterhin ist $H^1(\mathcal{G}(j)) = 0$ für alle $j \geq 0$. Damit ist die erste Gleichheit im Lemma gezeigt.

Es bleibt $j = -1$. Hier verschwindet $H^2(\mathcal{W}(-1))$, da $H^2(U^2(-1)) = 0$ ist. Aus der Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ entnehmen wir nach Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(-1)$:

$$H^1(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{G}(-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-1)) \otimes H^1(\mathcal{F})$$

Da die Endterme verschwinden, haben wir $H^1(\mathcal{G}(-1)) = H^1(\mathcal{F}(-1))$, und mit der vorigen Sequenz für $j = -1$ auch $H^1(\mathcal{B}(-1)) = H^1(\mathcal{F}(-1))$.

Lemma 1.1.11. *Es ist $\text{rang } \mathcal{B} = 2c_2$.*

Korollar 1.1.1. *Es ist $\mathcal{B} = H^1(\mathcal{F}(-1)) \otimes U$.*

Lemma 1.1.12. *Es ist $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{W}) = 0$.*

Beweis. Es ist $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{W}) = \text{Hom}(\mathcal{B}(-2), \omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2))$. Weiter ist aufgrund der eben berechneten Form von \mathcal{B} auch $\text{Hom}(\mathcal{B}(-2), \omega_X) = \text{Hom}(U(-2), \omega_X) \otimes H^1(\mathcal{F}(1))$. Nun ist aber $\text{Hom}(U(-2), \omega_X) = H^2(U(-2))^\vee = 0$.

1.1.20 Ein etaler Morphismus

Montag 27.06.2016

Betrachte $A = \mathbb{Q}[x]$ und $C = A[y]$ sowie

$$f = xy^2 - (x^2 + 1)y - (x^3 + 1) \tag{1.103}$$

und

$$f' = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - (x^2 + 1) \tag{1.104}$$

Es sei $B = C/(f)$ und $B' = B_{f'}$.

Man berechnet $\Omega_{B|A}$ durch $0 \rightarrow J \rightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{\Delta} B \rightarrow 0$ mit $\Delta(b_1, b_2) = b_1 b_2$ und der Beziehung

$$\Omega_{B|A} = J/J^2 \quad (1.105)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Omega_{B|A} &= \\ &= (B \otimes_A B)/(y - y', 2y'x - x^2 - 1, y'^2 + 2y' + x^2 - x) = \\ &= (B \otimes_A B)/K \quad (1.106) \end{aligned}$$

wobei y resp. y' für die Variable y im ersten resp. zweiten Faktor von $B \otimes_A B$ steht.

Das Ideal $K \subseteq B \otimes_A B$ wird mit Δ auf B nach vorne geschoben und liefert das Ideal $K' = (5x^4 + 2x^2 + 4x + 1, 2y + 5x^3 + x + 4)$. Es ist dann auch

$$\Omega_{B|A} = B/(5x^4 + 2x^2 + 4x + 1, 2y + 5x^3 + x + 4) = B/K' \quad (1.107)$$

Es ist also $\text{supp } \Omega_{B|A} = \text{Ann}_B(B/K') = V(K')$. Wegen $(K' : f') = (1)$ ist $(\Omega_{B|A})_{f'} = 0$ also $\Omega_{B'|A} = 0$ und $A \rightarrow B'$ etale.

Das interessante an diesem Beispiel ist, daß $B' = (A[y]/f(y))_{f'(y)}$ etale über A ist, mit einem nicht-monischen Polynom $f(y)$. Geometrisch bedeutet das Verschwinden des führenden Terms in $f(y)$ für $x = 0$, daß für $x = 0$ einer von den generisch zwei Punkten in $\text{Spec}(B)$ über einem Punkt von $\text{Spec}(A)$ ins Unendliche abwandert.

1.1.21 Normale und zusammenhängende projektive algebraische Schemata Montag, 01.08.2016

Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ein normales und zusammenhängendes Unterschema des projektiven Raums über dem Körper k .

Dann gilt

Proposition 1.1.1. 1. X ist ein Integritätsschema, also eine Varietät.

2. $X = \text{proj}(S) = \text{proj}(k[X_0, \dots, X_n]/I(X))$ mit dem Primideal $I(X)$.

3. Es ist $S' = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$ der ganze Abschluß S'' von S in $K(S)$, wobei $K(S) = \{\frac{f}{g} \mid f \in S_e, g \in S_{e'}\}$ der homogene Quotientenkörper von S ist.

Beweis. 1. X normal bedeutet: $\mathcal{O}_{X,x}$ ist normaler Integritätsring für alle $x \in X$. Also ist X reduziert. Wäre $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung in irreduzible Komponenten, so wäre $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ für geeignete i, j . Für jedes $x \in X_i \cap X_j$ wäre dann $\mathcal{O}_{X,x}$ kein Integritätsring, da X_i und X_j verschiedene minimale Primideale induzieren.

2. Es sei $fg \in I(X)$ und $g \notin I(X)$. Dann ist $g \notin I(X)_{(x_i)}$ für alle $i = 0, \dots, n$, denn wäre $g|_{U_i} = 0$, so wäre, da X Integritätsschema, auch $g = 0$ auf ganz X , also $g \in I(X)$. Also ist $f|_{U_i} = 0$, also $x_i^N f \in I(X)$ für alle i . Da $I(X)$ nach Definition saturiert ist, folgt $f \in I(X)$. Also ist $I(X)$ ein Primideal von $k[X_0, \dots, X_n]$.

3. Für $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \ni \alpha = f_i/x_i^e$ mit einem universellen e für alle i und $f_i \in S_{d+e}$ folgt $\alpha S_{\geq N} \subseteq S_{\geq N}^e$ für $N \gg 0$. Da $S_{\geq N}$ ein endlich erzeugter S -Modul ist, folgt α ganz über S .

Sei umgekehrt $s = f/g \in K(S)$, ganz über S , mit $\deg(s) = d$. Es gibt die Gleichung

$$s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_m = 0 \tag{1.108}$$

Teilt man durch x_i^{md} , so entsteht

$$\left(\frac{s}{x_i^d}\right)^m + \frac{c_1}{x_i^d} \left(\frac{s}{x_i^d}\right)^{m-1} + \dots + \frac{c_m}{x_i^{md}} = 0 \tag{1.109}$$

Behält man nur die Komponente vom Grad 0, so ist $\frac{s}{x_i^d}$ als ganz über $S_{(x_i)}$ nachgewiesen. Da X normal, ist $S_{(x_i)}$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper, also $a_i = s/x_i^d \in S_{(x_i)}$. Damit ist $s = a_i x_i^d$, und s definiert so über $(a_i x_i^d \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(d)))_i$, die miteinander verkleben, ein Element $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Also ist $S'' \subseteq S'$ und da nach der Eingangsüberlegung sowieso $S' \subseteq S''$ ist, folgt $S' = S''$ wie behauptet.

1.1.22 Resultanten als Kombination ihrer Polynome Donnerstag, 22.09.2016

Es sei A ein kommutativer Integritätsring und $R = A[x]$ der Polynomring über A . Weiter seien

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \tag{1.110}$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \tag{1.111}$$

zwei Polynome in R . Dann ist $\text{Res}_A(f, g) = D$ mit $D \in A$ die folgende Determinante

$$D = \det \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{pmatrix} = \det M(f, g) \tag{1.112}$$

Der Ausdruck $\text{Res}_A(f, g)$ heißt die *Resultante von f und g in x* . Die Matrix $M = M(f, g)$ ist also eine quadratische $(n+m) \times (n+m)$ Matrix in der oben n Verschiebungen von $(a_m, a_{m-1}, \dots, a_0)$ stehen und unten m Verschiebungen von $(b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)$. Die Matrix heißt auch *Sylvestermatrix von f und g* .

Die Lösungen $v = (r_{n-1}, \dots, r_0, s_{m-1}, \dots, s_0)$ der Gleichung

$$v \cdot M(f, g) = w$$

mit $w = (w_{n+m-1}, \dots, w_0)$ entsprechen den Polynomen

$$r(x) = r_{n-1}x^{n-1} + \dots + r_0 \quad (1.113)$$

$$s(x) = s_{m-1}x^{m-1} + \dots + s_0 \quad (1.114)$$

mit

$$r(x)f(x) + s(x)g(x) = w_{m+n-1}x^{m+n-1} + \dots + w_0$$

Da für $w = 0$ ein $v \neq 0$ wie oben mit $vM = 0$ genau dann existiert, wenn $\det M = \text{Res}(f, g) = 0$ ist, entscheidet das Verschwinden der Resultante über die Existenz zweier Polynome r, s mit $rf + sg = 0$ und $\deg r < \deg g$ und $\deg s < \deg f$. Dies ist wiederum, wie man sich überlegen kann, äquivalent zur Existenz eines gemeinsamen Faktors von f und g .

Aus der Matrixgleichung

$$M_{\text{ad}}M = (\det M)E = DE$$

genauer aus ihrer untersten Zeile entnehmen wir die Existenz eines Vektors $v \in A^{m+n}$ mit $vM = (0, \dots, 0, D)$. Dieser Vektor v ist die unterste Zeile von M_{ad} und definiert nach obiger Überlegung zwei Polynome $r, s \in A[x]$ mit $\deg r < \deg g$ und $\deg s < \deg f$, so daß

$$rf + sg = D = \text{Res}_A(f, g)$$

ist.

1.1.23 Die Grassmannvarietät $\text{Gr}(k, n)$ Samstag, 24.09.2016

Es sei für einen Körper κ und ganze Zahlen $k \leq n$ sowie einen n -dimensionalen κ -Vektorraum V sei

$$\text{Gr}(k, V) = \{W \mid W \subseteq V, \text{Untervektorraum mit } \dim_{\kappa} W = k\} \quad (1.115)$$

die *Grassmannvarietät der k -Untervektorräume in V* . Man schreibt auch $\text{Gr}(k, n)$ für $\text{Gr}(k, \kappa^n)$.

Fahnen und Zellen

Es sei

$$(0) = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n = V \quad (1.116)$$

eine ausgezeichnete Fahne in V mit $\dim V_i = i$.

Für eine bestimmte Folge ganzer Zahlen $[a_1, \dots, a_k]$ mit $i \leq a_i \leq n - k + i$ definieren wir eine Teilmenge $\Sigma_{[a_1, \dots, a_k]} \subseteq \text{Gr}(k, V)$ durch

$$\Sigma_{[a_1, \dots, a_k]} = \{W \in \text{Gr}(k, V) \mid \dim W \cap V_{a_i} = i, \text{ für alle } i\} \quad (1.117)$$

Es gibt mit

$$n - k + i - a_i = \lambda_i \tag{1.118}$$

$$a_i = n - k + i - \lambda_i \tag{1.119}$$

eine eindeutige Beziehung zwischen $[a_1, \dots, a_k]$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ wobei $0 \leq \lambda_i \leq n - k$ und $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$ ist.

Struktur als Varietät

Es sei $\mathcal{M} = \text{Mat}(k, n)$ der Raum der $k \times n$ Matrizen mit Koeffizienten aus κ . Weiter seien $I, J, K \subseteq \{1, \dots, n\}$ Teilmengen der Mächtigkeit k . Für ein $A \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir mit A_I die $k \times k$ -Untermatrix von A aus den Spalten i_1, \dots, i_k .

Es sei \mathcal{M}^I die Menge der Matrizen $A \in \mathcal{M}$, so daß A_I invertierbar ist.

Die Untervektorräume $W \subseteq V$ der Dimension k entsprechen den Matrizen $A \in \mathcal{M}$ unter der Äquivalenz $A \simeq A'$ genau dann, wenn eine invertierbare $k \times k$ -Matrix B existiert mit $BA = A'$.

Es sei $W \in \text{Gr}(k, n)$ und $A(W) \in \mathcal{M}$ eine darstellende Matrix für W . Dann ist $A \in \mathcal{M}^I$ für ein geeignetes I . Die Matrix $A_I^{-1}A = A'$ hat die Eigenschaft $A'_I = E_{k \times k}$. Wir nennen U_I die affine Varietät $\mathbb{A}_\kappa^{k(n-k)}$, die der Menge

$$U_I := \{A \in \mathcal{M}^I \mid A_I = E_{k \times k}\} \tag{1.120}$$

entspricht. Für jedes $W \in \text{Gr}(k, n)$ existiert also mindestens ein I mit $A(W) \in U_I$ und dieses $A(W)$ ist eindeutig bestimmt.

Es sei $U_{IJ} = U_I \cap \mathcal{M}^J$ und $U_{IJK} = U_{IJ} \cap U_{IK}$, offene Mengen in U_I , da sie Komplemente von abgeschlossenen Mengen sind, die als Verschwindungsmengen von Determinantengleichungen entstehen.

Die Varietät $\text{Gr}(k, n)$ entsteht durch Verkleben der $U_{IJ} \subseteq U_I$ mit $U_{JI} \subseteq U_J$ durch die Abbildungen

$$\psi_{IJ} : A \mapsto A_J^{-1}A \tag{1.121}$$

Die Abbildungen sind kompatibel als Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} U_{IJK} & \xrightarrow{g} & U_{JIK} \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & & U_{KIJ} \end{array} \tag{1.122}$$

mit $g = \psi_{IJ}$, $f = \psi_{JK}$ und $h = \psi_{IK}$.

Es ist nämlich für $A \in U_{IJK}$ das Bild

$$g(A) = A_J^{-1}A$$

und

$$f(A') = (A'_K)^{-1}A'$$

sowie

$$h(A) = A_K^{-1}A.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} f(g(A)) &= (A_J^{-1}A)_K^{-1}A_J^{-1}A = (A_J^{-1}A_K)^{-1}A_J^{-1}A = \\ &= A_K^{-1}(A_J^{-1})^{-1}A_J^{-1}A = h(A). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Proposition 1.1.2. *Die Menge $\text{Gr}(k, V)$ trägt die Struktur einer κ -Varietät der Dimension $N = k(n - k)$ und die $\Sigma_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$ sind eine Zellenzerlegung dieser Varietät.*

Proposition 1.1.3. *Es ist mit $N = k(n - k)$ die Dimension*

$$\dim \Sigma_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} = N - (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \quad (1.124)$$

Die Matrix $M = M_{[a_1, \dots, a_k]}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.125)$$

hat k Zeilen und n Spalten. Die 1 in Zeile i steht in Spalte a_i . Die Dimension des Raumes dieser Matrizen ist

$$kn - \sum_i (n - a_i + 1) + (k - i) = kn - F \quad (1.126)$$

Der Ausdruck $n - a_i + 1$ zählt die 1 und die Nullen in Zeile i , der Ausdruck $k - i$ die Nullen unter der 1 in Spalte a_i .

Mit $a_i = n - k + i - \lambda_i$ ist

$$F = \sum_i (2(k - i) + 1 + \lambda_i) = k^2 + \sum_i \lambda_i \quad (1.127)$$

Die Kodimension C des Raumes der Matrizen $M_{[a_1, \dots, a_k]} = M_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$ bezogen auf $k(n - k)$, die Dimension von $\text{Gr}(k, n)$, ist

$$\begin{aligned} C &= k(n - k) - (kn - F) = k(n - k) - \left(kn - \left(k^2 + \sum_i \lambda_i \right) \right) = \\ &= kn - k^2 - kn + k^2 + \sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \end{aligned} \quad (1.128)$$

1.1.24 Änderung von $H^1(X, \Omega_X)$ unter Aufblasung eines Punktes P in einer Fläche X . Freitag, 06.01.2017

Alle Varietäten seien über dem Körper k definiert.

Zunächst eine allgemeine Vorüberlegung für eine beliebige Aufblasung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ einer regulären Varietät X in einer regulären Untervarietät $Y \subseteq X$ mit exzeptionellem Divisor E .

Wir haben das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{j} & X \end{array} \quad (1.129)$$

Es seien $\mathcal{N}_{Y/X}^\vee = \mathcal{J}_{Y|X}/\mathcal{J}_{Y|X}^2$ und $\mathcal{N}_{E|\tilde{X}}^\vee = \mathcal{J}_{E|\tilde{X}}/\mathcal{J}_{E|\tilde{X}}^2$. Es ist dann $E = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y|X})$ und $\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{N}_{E|\tilde{X}}^\vee$. Daraus folgt

$$\pi'^* \mathcal{N}_{Y|X}^\vee \rightarrow \mathcal{N}_{E|\tilde{X}}^\vee \rightarrow 0 \quad (1.130)$$

ist exakt.

Weiterhin ist exakt

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_X \rightarrow \Omega_{\tilde{X}} \rightarrow \Omega_{\tilde{X}|X} \rightarrow 0 \quad (1.131)$$

Die Exaktheit links folgt aus $\pi^* \Omega_X|_U = \Omega_{\tilde{X}}|_U$ für die in der Varietät \tilde{X} dichte offene Menge $U = \tilde{X} - E$ und der Tatsache, daß $\pi^* \Omega_X$ und $\Omega_{\tilde{X}}$ Vektorbündel auf \tilde{X} sind, also lokal von der Form \mathcal{O}_V^m für $V \subseteq \tilde{X}$, offen, und m geeignet. Anwenden von i^* liefert

$$0 \rightarrow i^* \pi^* \Omega_X \rightarrow i^* \Omega_{\tilde{X}} \rightarrow i^* \Omega_{\tilde{X}|X} \rightarrow 0 \quad (1.132)$$

Man beachte $i^* \Omega_{\tilde{X}|X} = \Omega_{\tilde{X}|X}$, da $\Omega_{\tilde{X}|X}$ ihren Support in E hat. Ferner ist exakt

$$0 \rightarrow \pi'^* \Omega_Y \rightarrow \Omega_E \rightarrow \Omega_{E|Y} \rightarrow 0 \quad (1.133)$$

denn $\pi' : E \rightarrow Y$ ist glatt, sowie

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{E|\tilde{X}}^\vee \rightarrow i^* \Omega_{\tilde{X}} \rightarrow \Omega_E \rightarrow 0 \quad (1.134)$$

und

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{Y|X}^\vee \rightarrow j^* \Omega_X \rightarrow \Omega_Y \rightarrow 0 \quad (1.135)$$

Durch Anwenden von π'^* folgt (beachte Nichtexaktheit links):

$$\pi'^* \mathcal{N}_{Y|X}^\vee \rightarrow \pi'^* j^* \Omega_X \rightarrow \pi'^* \Omega_Y \rightarrow 0 \quad (1.136)$$

Insgesamt ergibt sich das Diagramm (beachte u.a. $\pi'^* j^* \Omega_X = i^* \pi^* \Omega_X$):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & (1.137) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \pi'^* \mathcal{N}_{Y|X}^\vee & \longrightarrow & \pi'^* j^* \Omega_X & \longrightarrow & \pi'^* \Omega_Y \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{E|\tilde{X}}^\vee & \longrightarrow & i^* \Omega_{\tilde{X}} & \longrightarrow & \Omega_E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & i^* \Omega_{\tilde{X}|X} & \longrightarrow & \Omega_{E|Y} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Es sei nun X eine nichtsinguläre 2-dimensionale projektive Varietät, also eine Fläche und $Y = P$ ein abgeschlossener Punkt. Es ist damit auch $E \cong \mathbb{P}^1$ und $\Omega_{\tilde{X}|X} = \Omega_{E|Y} = \Omega_E$. Die Sequenz (1.131) ist also von der Form

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_X \rightarrow \Omega_{\tilde{X}} \rightarrow \Omega_E \rightarrow 0 \quad (1.138)$$

Wir betrachten die lange exakte Kohomologiesequenz der $H^i(\tilde{X}, -)$ hiervon: Zunächst ist $H^i(\tilde{X}, \pi^* \Omega_X) = H^i(X, \Omega_X)$, denn: Es ist

$$R^i \pi_* \pi^* \Omega_X = R^i \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes \pi^* \Omega_X) = R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes \Omega_X \quad (1.139)$$

Nach einem allgemeinen Satz ist

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0 \text{ für } i > 0 \quad (1.140)$$

$$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X \quad (1.141)$$

Also ist $R^i \pi_* \pi^* \Omega_X = 0$ für $i > 0$ und deshalb nach der Leray-Spektralsequenz (erste Gleichheit) und nach obigen Überlegungen für $i = 0$ (zweite Gleichheit):

$$H^i(\tilde{X}, \pi^* \Omega_X) = H^i(X, \pi_* \pi^* \Omega_X) = H^i(X, \Omega_X) \quad (1.142)$$

Es bleiben die $H^i(\tilde{X}, \Omega_E)$ zu untersuchen: Es ist $H^i(\tilde{X}, \Omega_E) = H^i(E, \Omega_E) = H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Also

$$H^2(E, \Omega_E) = 0 \quad (1.143)$$

$$H^1(E, \Omega_E) = k \quad (1.144)$$

$$H^0(E, \Omega_E) = 0 \quad (1.145)$$

Nach der langen exakten Kohomologiesequenz zu (1.138) ist also

$$H^0(\tilde{X}, \pi^* \Omega_X) = H^0(X, \Omega_X) = H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}})$$

und wegen Serre-Dualität von Ω_X auf X und $\Omega_{\tilde{X}}$ auf \tilde{X} auch

$$H^2(\tilde{X}, \pi^* \Omega_X) = H^2(X, \Omega_X) = H^2(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}).$$

Es bleibt die mittlere Sequenz, die jetzt exakt ist:

$$0 \rightarrow H^1(X, \Omega_X) \rightarrow H^1(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}) \rightarrow k \rightarrow 0 \tag{1.146}$$

Wir haben also

Theorem 1.1.2. *Es sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung einer nichtsingulären Fläche X in einem abgeschlossenen Punkt P : Dann ist*

$$h^{1,0}(\tilde{X}) = h^{1,0}(X) \tag{1.147}$$

$$h^{1,2}(\tilde{X}) = h^{1,2}(X) \tag{1.148}$$

$$h^{1,1}(\tilde{X}) = h^{1,1}(X) + 1 \tag{1.149}$$

mit $h^{p,q}(F) = H^q(F, \Omega_F^p)$, den Hodge-Zahlen.

1.1.25 Integralkurven eines holomorphen Vektorfeldes $z \mapsto f(z)$ von $\mathbb{C} \rightarrow T\mathbb{C}$. Montag, 13.02.2017

Es sei $z \mapsto f(z)$ ein holomorphes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Gesucht ist eine holomorphe Funktion $Q(z)$, so daß $\Im Q(z) = c$ für $c \in \mathbb{R}$ ein System von Integralkurven für $f(z)$ bildet.

Wir schreiben die Differentialgleichung für eine einzige Integralkurve:

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t)) = f(z) \tag{1.150}$$

Es folgt

$$\frac{dz}{f(z)} = dt \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)} = t + c \Rightarrow Q(z) = t + c \tag{1.151}$$

indem wir $Q(z) = \int dz/f(z)$ setzen. Nun ist t reell und $c \in \mathbb{C}$ beliebig. Die Integralkurve ist also durch

$$\Im Q(z) = \Im c = \text{const.}$$

gekennzeichnet.

Beispiel 1.1.1. Es sei $f(z) = z$, das Vektorfeld mit radial vom Ursprung nach außen strebenden Vektoren. Dann ist $Q(z) = \int dz/z = \log(z) = \log(r) + i\phi$. Es ist also

$$\Im Q(z) = \Im \log(z) = \phi = \text{const.}$$

und das sind in der Tat die Integralkurven von $z \mapsto z$.

1.1.26 Kohomologiegruppen von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ auf \mathbb{P}_A^n . Montag 11.09.2017

Es sei $S = A[x_0, \dots, x_n]$ ein Polynomring über dem kommutativen Ring A . Dann ist $X = \mathbb{P}_A^n = \text{proj}(S)$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) = \widehat{S}(d)$.

Um die Kohomologien $H^i(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d))$ zu berechnen, bilden wir $\mathcal{M} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ und berechnen $H^i(X, \mathcal{M})$. Dazu wählen wir die affine Überdeckung

$$\mathfrak{U} = (U_i = D_+(x_i))_{i=0, \dots, n}$$

und berechnen $\check{H}^i(X, \mathcal{M})$.

Es ist

$$\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{M}) = S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}}$$

Die Abbildungen $d^p : \check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ werden durch

$$p_{i_0, \dots, i_{p+1}}(d^p) = \sum_{\nu=0}^{p+1} (-1)^\nu l_{i_0, \dots, i_{p+1}}^{i_\nu}$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} l_{i_0, \dots, i_{p+1}}^{i_\nu} : \Gamma(U_{i_0, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_{p+1}}, \mathcal{M}) &= S_{x_{i_0} \dots \widehat{x_{i_\nu}} \dots x_{i_{p+1}}} \rightarrow \\ &\Gamma(U_{i_0, \dots, i_{p+1}}, \mathcal{M}) = S_{x_{i_0} \dots x_{i_{p+1}}} \end{aligned} \quad (1.152)$$

durch die kanonische Inklusion

$$l_{i_0, \dots, i_{p+1}}^{i_\nu} : S_{x_{i_0} \dots \widehat{x_{i_\nu}} \dots x_{i_{p+1}}} \rightarrow S_{x_{i_0} \dots x_{i_{p+1}}}$$

gegeben ist.

Wir fassen nun für ein homogenes $f \in S$ die Lokalisierung S_f als

$$S_f = \varinjlim_{m \geq 0} \left(S^{(0)} \xrightarrow{\cdot f} S^{(1)} \xrightarrow{\cdot f} S^{(2)} \xrightarrow{\cdot f} \dots \right)$$

auf, wobei $S^{(i)} = S$ ist und die Abbildung $\varinjlim_{m \geq 0} S^{(m)} \rightarrow S_f$ durch $a_m \mapsto a_m/f^m$ gegeben ist. Die Abbildung $l_{i_0, \dots, i_{p+1}}^{i_\nu}$ wird dann durch die Multiplikationen

$$S^{(m)} \xrightarrow{\cdot x_{i_\nu}^m} S^{(m)}$$

in den Darstellungen

$$S_{x_{i_0} \dots x_{i_{p+1}}} = \varinjlim_{m \geq 0} \left(S^{(0)} \xrightarrow{\cdot x_{i_0} \dots x_{i_{p+1}}} S^{(1)} \xrightarrow{\cdot x_{i_0} \dots x_{i_{p+1}}} \dots \right)$$

und

$$S_{x_{i_0} \cdots \widehat{x_{i_\nu}} \cdots x_{i_{p+1}}} = \varinjlim_{m \geq 0} \left(S^{(0)} \xrightarrow{\cdot x_{i_0} \cdots \widehat{x_{i_\nu}} \cdots x_{i_{p+1}}} S^{(1)} \xrightarrow{\cdot x_{i_0} \cdots \widehat{x_{i_\nu}} \cdots x_{i_{p+1}}} \dots \right)$$

gegeben.

Betrachtet man nun nur die Ebene der $S^{(m)}$, so wird der Komplex $\check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ durch den Koszul-Komplex $K_{n-p}(x_0^m, \dots, (-1)^j x_j^m, \dots, (-1)^n x_n^m)$ dargestellt, also im ganzen

$$\varinjlim_{m \geq 0} K_{n-p}(x_0^m, \dots, (-1)^n x_n^m) = \check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$$

Um dies einzusehen ordne man dem Term $\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{M})$ auf der Ebene m den Ausdruck $S_{i_0} \wedge \cdots \wedge i_p$ zu, so daß die Abbildung d^p durch die Summe der

$$S_{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{i_\nu} \wedge \cdots \wedge i_{p+1} \xrightarrow{(-1)^\nu x_{i_\nu}^m} S_{i_0} \wedge \cdots \wedge i_{p+1}$$

dargestellt wird.

Nun entspreche $i_0 \wedge \cdots \wedge i_p$ im zu konstruierenden Koszul-Komplex dem Term $S_{\widehat{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{i_p}}$ also dem Produkt der $0, \dots, n$, die nicht unter den i_0, \dots, i_p auftauchen. Man hat dann im Koszul-Komplex $K_\bullet(x_0^m, \dots, x_n^m)$ den Übergang

$$S_{\widehat{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{i_{\nu-1}} \wedge i_\nu \wedge \widehat{i_{\nu+1}} \cdots \wedge \widehat{i_{p+1}}} \xrightarrow{\cdot (-1)^{i_\nu - \nu} x_{i_\nu}^m} S_{\widehat{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{i_{p+1}}}$$

von $K_{n+1-(p+1)} = K_{n-p}$ nach $K_{n+1-(p+2)} = K_{n-p-1}$. Es stehen ja im Komplementärausdruck zu $i_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{i_\nu} \wedge \cdots \wedge i_{p+1}$ vor dem darin auftretenden i_ν genau $i_\nu - \nu$ Elemente aus $0, \dots, i_\nu - 1$, so daß nach den Regeln des Koszul-Komplexes der Faktor $(-1)^{i_\nu - \nu} x_{i_\nu}^m$ aufgenommen wird. Bringt nun $x_{i_\nu}^m$ selbst den Faktor $(-1)^{i_\nu}$ mit, so entspricht der entstehende Koszul-Komplex unter der Komplementarität von $i_0 \wedge \cdots \wedge i_p \mapsto \widehat{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{i_p}$ genau dem (m -Teil des) Cech-Komplex $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ in umgekehrter Indizierung.

Da x_0^m, \dots, x_n^m eine reguläre Folge in S ist, ist $h^\nu(K_\bullet(x_0^m, \dots, x_n^m)) = 0$ für $\nu = 1, \dots, n+1$. Also ist $h^p(\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M})) = 0$ für $p = n-1, \dots, 1$ und damit

$$H^i(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)) = 0$$

für alle d und $i = 1, \dots, n-1$.

Genaue Untersuchung der Ränder des Koszul-Komplexes ergibt dann auch noch die Beziehungen

$$H^0(X, \mathcal{M}) = S$$

und

$$H^n(X, \mathcal{M}) = 1/(x_0 \cdots x_n)A[1/x_0, \dots, 1/x_n]$$

1.1.27 Berechnung der algebraischen de Rham–Kohomologie $H_{\text{DR}}^i(X)$.**Dienstag 17.10.2017**

Es sei X/k eine algebraische Varietät über $k = \mathbb{C}$. Betrachte die Sequenz $(\Omega_{X|k}^\bullet)$

$$\mathcal{O}_X = \Omega_{X|k}^0 \xrightarrow{d^0} \Omega_{X|k}^1 \xrightarrow{d^1} \Omega_{X|k}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

wobei $\Omega_{X|k}^p = \bigwedge^p \Omega_{X|k}$ und $d^p : \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|k}^{p+1}$ die äußere Ableitung ist. Diese ist k -linear aber nicht \mathcal{O}_X -linear.

Man definiert die i -te de Rham Kohomologie von X als

$$H_{\text{DR}}^i(X) = \mathbb{H}^i(\Omega_{X|k}^\bullet)$$

wobei $\mathbb{H}^i(L^\bullet)$ für die i -te Hyperkohomologie des Komplexes L^\bullet steht.

Ist X eine affine Varietät, so ist

$$\mathbb{H}^i(\Omega_{X|k}^\bullet) = h^i(\Omega_{X|k}^\bullet(X))$$

wobei $h^i(L^\bullet)$ für die gewöhnliche i -te Kohomologie von L^\bullet steht. Dies gilt, weil $H^j(X, \Omega_{X|k}^p) = 0$ für $j > 0$, denn $\Omega_{X|k}^p$ ist eine quasikohärente Garbe auf einem affinen Schema.

Theorem 1.1.3. *Es sei $U = X - Y$ mit $X = \mathbb{A}_k^n$ und $Y = V(f_1, \dots, f_r)$ einem abgeschlossenen Unterschema von X . Es ist dann konstruktiv möglich $H_{\text{DR}}^i(U)$ zu berechnen.*

Dies geschieht mittels D -Moduln und ist beschrieben in

Algorithmic Computation of de Rham Cohomology of Complements of Complex Affine Varieties, *U. Walther*, J. Symb. Comput. 29, No. 4–5, 795–839

Aus

On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *R. Hartshorne*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 45, 5–99

entnehmen wir in der Situation des Theorems und mit der Zusatzannahme, daß Y glatt ist, die Sequenz (Theorem 3.3):

$$\dots H_q(Y) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X - Y) \rightarrow H_{q-1}(Y) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

wobei $H_q(W)$ für die dort definierte *de Rham Homologie* steht, und die Beziehungen (Proposition 3.4)

$$H_q(X) = H_{\text{DR}}^{2n-q}(X)$$

$$H_q(Y) = H_{\text{DR}}^{2r-q}(Y)$$

mit $\dim X = n$ und $\dim Y = r$ gelten.

Zusammen ergibt dies

$$\cdots \rightarrow H_{\text{DR}}^{2r-q}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q}(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q}(U) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2r-q+1}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q+1}(X) \rightarrow \cdots$$

oder auch mit $s = \text{codim}(Y, X) = n - r$:

$$\cdots \rightarrow H_{\text{DR}}^{q-2s}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(U) \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1-2s}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(X) \rightarrow \cdots$$

Nun ist aber $H_{\text{DR}}^q(X) = H_{\text{DR}}^q(\mathbb{A}_k^n) = 0$ für $q > 0$, also

$$H_{\text{DR}}^i(Y) = H_{\text{DR}}^{i+2s-1}(U)$$

Da $H_{\text{DR}}^q(U)$ nach obigem Theorem für alle q berechnet werden kann, gilt dies auch für $H_{\text{DR}}^i(Y)$.

Es ist nun der Fall eines allgemeinen quasiprojektiven $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ zu diskutieren. Wir nehmen zunächst an, daß X *glatt* ist.

Es sei

$$X = \bar{X} \cap (\mathbb{P}_k^n - Z) = \bar{X} \cap U$$

mit abgeschlossenen Schemata $\bar{X}, Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ und $Z = V(g_1, \dots, g_s)$ wo g_i homogene Polynome im Koordinatenring von \mathbb{P}_k^n sind.

Nimmt man die offenen Mengen

$$U_i = D_+(g_i) \subseteq \mathbb{P}_k^n$$

so ist $V_i = U_i \cap X$ eine offene Überdeckung von X mit affinen, in X offenen, Mengen.

Es ist sogar $V_{i_0 \dots i_q} = U_{i_0 \dots i_q} \cap X \subseteq U_{i_0 \dots i_q}$ ein abgeschlossenes glattes, affines Unterschema des affinen Schemas

$$U_{i_0 \dots i_q} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q} = D_+(g_{i_0} \cdots g_{i_q}).$$

Mit einer Veronese-Einbettung $v_d : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ wobei $d = \prod_{\nu=0}^q \deg g_{i_\nu}$ ist, ist

$$v_d : v_d^{-1}(D_+(w)) = U_{i_0 \dots i_q} \rightarrow D_+(w) = \mathbb{A}_k^N$$

eine abgeschlossene Immersion. Dabei ist w eine aus $\prod_{\nu=1}^q g_{i_\nu}$ abgeleitete Linearform im Koordinatenring von \mathbb{P}_k^N .

Da $i : V_{i_0 \dots i_q} \rightarrow U_{i_0 \dots i_q}$ eine abgeschlossene Immersion ist, ist auch

$$v'_d = v_d \circ i : V_{i_0 \dots i_q} \rightarrow U_{i_0 \dots i_q} \xrightarrow{v_d} D_+(w) = \mathbb{A}_k^N$$

eine abgeschlossene Immersion.

Es ist also $V_{i_0 \dots i_q} \cong v'_d(V_{i_0 \dots i_q})$ sogar ein glattes abgeschlossenes Unterschema von \mathbb{A}_k^N .

Nach obigem ist damit $H_{\text{DR}}^p(V_{i_0 \dots i_q})$ explizit berechenbar.

Betrachte nun die Čech-de Rham Spektralsequenz für die Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ von X :

$$E_0^{pq} = \check{C}^q(\mathfrak{V}, \Omega_{X|k}^p) = \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(V_{i_0, \dots, i_q}, \Omega_{X|k}^p)$$

Nach allgemeinen Sätzen konvergiert E_r^{pq} gegen die $H_{\text{DR}}^\bullet(X)$:

$$E_r^{pq} \Rightarrow H_{\text{DR}}^\bullet(X)$$

Siehe dafür

On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *M. Stevenson*,

http://www-personal.umich.edu/~stevmatt/algebraic_de_rham.pdf

Abschnitt 4.1, p. 7.

Bildet man E_1^{pq} mit Bildung der Kohomologie entlang der p -Achse, so ergibt sich

$$E_1^{pq} = \prod_{i_0 < \dots < i_q} H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$$

Man beachte dafür, daß, weil V_{i_0, \dots, i_q} affin, die Gleichheit

$$H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q}) = \mathbb{H}^p(\Omega_{V_{i_0, \dots, i_q}|k}^\bullet) = h^p(\Gamma(V_{i_0, \dots, i_q}, \Omega_{V_{i_0, \dots, i_q}|k}^\bullet))$$

gilt.

Wie oben bemerkt ist $H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$ explizit berechenbar und zumindest theoretisch ist damit auch der Grenzwert $H_{\text{DR}}^\bullet(X)$ der Spektralsequenz einer expliziten Berechnung zugänglich.

Anmerkung 1.1.4. Der Vorteil mit den $E_1^{pq} = \prod_{i_0 < \dots < i_q} H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$ zu rechnen, anstelle mit der Seite E_0^{pq} direkt anzufangen, liegt darin, daß die Elemente E_0^{pq} unendliche, aber die E_1^{pq} endliche k -Moduln sind.

Das folgende Theorem ist aus obiger Arbeit von Hartshorne (Theorem 4.4):

Theorem 1.1.4. *Es sei $f : X' \rightarrow X$ eine eigentliche Abbildung von Schemata und $Y \subseteq X$ ein Unterschema von X , sowie $Y' = f^{-1}(Y)$ das Urbildschema von Y .*

Es gelte

- i) Die Abbildung f bilde $X' - Y'$ isomorph auf $X - Y$ ab.*
- ii) Weiter gebe es abgeschlossene Immersionen $X' \rightarrow Z'$ und $X \rightarrow Z$ in glatte Schemata Z', Z , sowie einen eigentlichen Morphismus $g : Z' \rightarrow Z$ mit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Z' \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

der $Z' - g^{-1}(Y)$ isomorph auf $Z - Y$ abbildet.

Dann gibt es eine lange exakte Sequenz in der de Rham-Kohomologie

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^q(X) \rightarrow H_{DR}^q(X') \oplus H_{DR}^q(Y) \rightarrow H_{DR}^q(Y') \rightarrow H_{DR}^{q+1}(X) \rightarrow \cdots \tag{1.153}$$

Wir können es verwenden, um für ein beliebiges quasiprojektives Schema $X \subseteq \mathbb{P}_k^n = Z$ die Kohomologien $H_{DR}^q(X)$ zu berechnen.

Wir schreiben $X = X_0 \cap U$ mit einem abgeschlossenen $X_0 \subseteq \mathbb{P}_k^n$ und einem offenen $U \subseteq \mathbb{P}_k^n$.

Wir können für X_0 eine Desingularisierung $f : X'_0 \rightarrow X_0$ finden, sowie einen eigentlichen Morphismus $g : Z' \rightarrow Z$ mit

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \longrightarrow & Z' \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

wo die waagrechten Abbildungen abgeschlossene Immersionen und X'_0 und Z' glatte Schemata sind. (Vergleiche die Bemerkung nach dem obigen Theorem in dem Artikel von Hartshorne). Die Abbildung g ist die wiederholte Aufblasung an regulären Unterschemata.

Der Morphismus $f : X'_0 \rightarrow X_0$ erfüllt nun die Bedingungen des vorigen Theorems mit $X = X_0$, $X' = X'_0$ sowie $Y = Y_0 \subseteq X_0$, geeignetes echtes Unterschema mit $\dim Y_0 < \dim X_0$, und $Y' = Y'_0 = f^{-1}(Y_0)$. Man kann Y_0 als das Unterschema der singulären Punkte von X_0 wählen, („strong desingularization“).

Bildet man die Basiserweiterung von g mit $U \rightarrow Z$ und die von f mit $U \cap X_0 \rightarrow X_0$, so ergibt sich ein kompatibles System

$$\begin{array}{ccc} X' = f^{-1}(U \cap X_0) & \longrightarrow & g^{-1}(U) \\ f' \downarrow & & g \downarrow \\ X & \longrightarrow & U \end{array}$$

so daß der Morphismus $f' : f^{-1}(U \cap X_0) \rightarrow X$ die Bedingungen des vorigen Theorems mit $X = X$, $X' = f^{-1}(U \cap X_0)$, $Y = Y_0 \cap U$, $Y' = f'^{-1}(Y_0 \cap U)$ erfüllt.

Es ist aber X' als offener Teil von X'_0 ein glattes, quasiprojektives Schema, so daß $H_{DR}^q(X')$ berechenbar ist. Ebenso sind $H_{DR}^q(Y)$ und $H_{DR}^q(Y')$ kraft Induktion über die Dimension der Varietät, deren Kohomologie gesucht wird, berechenbar.

Die lange exakte Sequenz aus dem vorigen Theorem ergibt deshalb Bedingungen, aus denen sich auch $H_{DR}^q(X)$ berechnen läßt:

$$\begin{aligned} H_{DR}^q(X') \oplus H_{DR}^q(Y) &\rightarrow H_{DR}^q(Y') \rightarrow H_{DR}^{q+1}(X) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{DR}^{q+1}(X') \oplus H_{DR}^{q+1}(Y) \rightarrow H_{DR}^{q+1}(Y') \end{aligned} \tag{1.154}$$

Damit können nun $H_{DR}^q(X)$ für alle quasiprojektiven $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ berechnet werden.

1.1.28 Gröbner bases of resultants and their monomial ideals. Donnerstag, 16.11.2017

Consider the ring $R = \mathbb{Q}[x, a_1, \dots, a_m]$ for a certain integer m and the homogeneous polynomial

$$f = x^{m+1} + \sum_{i=1}^m a_i x^{m+1-i} \quad (1.155)$$

Now let

$$g_j = \text{resultant}_x\left(f, \frac{d^{m+1-j}}{dx^{m+1-j}} f\right) \quad (1.156)$$

for $j = 1, \dots, m$ and let

$$I_s = (g_1, \dots, g_s) \quad (1.157)$$

be an ideal of R (and of $S = \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_m]$).

Now if one computes a gröbner base of I_s in R or S with respect to the natural graded reverse lexicographic monomial order (the default order in Macaulay2) one finds experimentally, that the radical of the monomial ideal generated by the leading monomials of the gröbner base (which is identical to the radical of the leading monomials of I_s itself, by gröbner base theory) is of the form

$$\sqrt{\text{lmon}(I_s)} = (a_1, \dots, a_s) \quad (1.158)$$

I checked this for $m + 1 = 2, 3, 4, 5, 6$ with the following little piece of Macaulay2 code

```
compresulseq = (nn) ->
(
  m := nn - 1;

  R := QQ[x,a_1..a_m];

  f := x^nn + sum toList apply(1..m, jj->a_jj^jj * x^(nn - jj));

  resulseq := toList apply(1..m, jj->resultant(f, diff(x^(nn - jj), f), x));

  resulseq
);

getinitterms2 = (reslissecond) ->
(
  m := length reslissecond;

  result := toList apply(1..m, jj->ideal (take ( reslissecond, {0, jj-1})));
```

```

    result = apply(result,
ww-> radical ideal apply(flatten entries gens gb ww, uu->leadTerm uu));

    result

);

```

1.1.29 Algebraic independence of polynomials. Freitag, 01.12.2017

Let $A = k[x_1, \dots, x_m]$ be a polynomial ring. Let

$$f_1, \dots, f_m \in A$$

be a sequence of elements of A of the form

$$f_i = c_i x_i^d + r_i x_i, \quad c_i \in k$$

with $r_i \in A$, such that $\deg(r_i x_i) \leq d$ and $r_i x_i$ does not contain the monomial x_i^d .

Then every sequence f_1, \dots, f_s with $s = 1, \dots, m$ consists of algebraically independent elements.

We prove the stronger

Proposition 1.1.4. *If f^ϕ stands for $f|_{x_{s+1}=\dots=x_m=0}$ then*

$$f_1^\phi, \dots, f_s^\phi$$

is a sequence of algebraically independent elements (over k).

Proof. This is clear for $s = 1$. Let an algebraic relation

$$\begin{aligned}
 F(f_1^\phi, \dots, f_s^\phi) &= \\
 &= F_0(f_1^\phi, \dots, f_{s-1}^\phi) + f_s^\phi F_1(f_1^\phi, \dots, f_{s-1}^\phi) + \dots + (f_s^\phi)^m F_m(f_1^\phi, \dots, f_{s-1}^\phi) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.159}$$

exist. Under $x_s \rightarrow 0$ the polynomial f_s^ϕ goes to zero. By induction we conclude, that $F_0(X_1, \dots, X_{s-1}) \in k[X_1, \dots, X_{s-1}]$ vanishes identically. So we have

$$f_s^\phi F_1(f_1^\phi, \dots, f_{s-1}^\phi) + \dots + (f_s^\phi)^m F_m(f_1^\phi, \dots, f_{s-1}^\phi) = 0$$

Dividing by f_s^ϕ and repeating the argument, we get, that F_1, F_2, \dots, F_m are zero too. So F vanishes and $f_1^\phi, \dots, f_s^\phi$ are algebraically independent.

Corollary 1.1.2. *With the notations above, the f_1, \dots, f_s are algebraically independent over k .*

1.1.30 Hauptsatz über etale Morphismen. Sonntag, 04.03.2018

Proposition 1.1.5. *Es sei $A \rightarrow B$ ein etaler Ringhomomorphismus sowie $\mathfrak{q} \subseteq B$ ein Primideal von B .*

Dann existiert ein $b \in B$ und ein $g \in B$, so daß

$$B_g = A[b]_g = (A[T]/(F(T)))_{H(T)}$$

mit einem monischen Polynom $F(T) \in A[T]$ und einem Polynom $H(T) \in A[T]$. Weiterhin ist auch $F'(T)$ eine Einheit in $(A[T]/(F(T)))_{H(T)}$ und es ist $\mathfrak{q} \in D(g)$ sowie B_g etale über A .

Beweis. Es ist $B \otimes_A k(y)$ für jedes $y \in \text{Spec}(A)$ das Produkt $K_1 \times \cdots \times K_r$ von endlich vielen separablen $k(y)$ -Algebren.

Also ist B/A eine quasiendliche Schemaabbildung. Nach Zariskis Hauptsatz gibt es eine endliche A -Algebra C mit einer Abbildung $C \rightarrow B$, so daß $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$ eine offene Immersion darstellt.

Ist $\mathfrak{p} = y$ das Bild von $\mathfrak{q} = x$ in $\text{Spec}(A)$, so ist die Faser $B \otimes_A k(y)$ ein Produkt $K_1 \times \cdots \times K_s$ von endlich vielen separablen $k(y)$ -Algebren, eine davon gleich $k(\mathfrak{q}) = K_1$.

Des weiteren ist $C \otimes_A k(y)$ ein Produkt von endlich vielen artinschen $k(y)$ -Algebren, $L_1 \times \cdots \times L_t$, wobei die K_i unter den L_j sämtlich einzeln vorkommen.

Nach dem chinesischen Restsatz ist die Abbildung $C \rightarrow C \otimes_A k(y)$ surjektiv. Ist nun $k(\mathfrak{q}) = K_1 = L_1 = k(y)(\alpha)$ mit einem $\alpha \in K_1$, so kann also ein $c \in C$ gewählt werden, für das $c \otimes_A 1$ in K_1 dem Element α und in den anderen L_j dem Element 0 entspricht.

Indem man α nach Bedarf mit einem Element aus A/\mathfrak{p} multipliziert, kann man annehmen, daß sein Minimalpolynom $f(T) \in k(y)[T]$ sogar schon aus $(A/\mathfrak{p})[T]$ stammt und monisch ist. Es sei $F(T) \in A[T]$ dann ein (ebenfalls monisches) Urbild von $f(T) \in (A/\mathfrak{p})[T]$.

Das affine Schema $A[c]$, endlich über A , ist dann mit einer Abbildung $A[c] \rightarrow C$ ausgestattet, also einem Schemamorphismus $\text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(A[c])$. Dieser induziert bei $x = \mathfrak{q}$ einen lokalen Isomorphismus zwischen $\text{Spec}(A[c])$, $\text{Spec}(B)$ und $\text{Spec}(C)$. (Dabei sei x kraft der offenen Immersion $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$ auch als Element von $\text{Spec}(C)$ angesehen.)

Man erkennt dies durch Betrachtung von $C \otimes_A k(y)$ und $A[c] \otimes_A k(y)$, die sich beide bei dem Bild von x in der Faser über $k(y)$ zu $K_1 = k(x) = k(\mathfrak{q})$ reduzieren.

Hier wurde von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß für Ringe S/R und $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S)$ sowie $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ die Beziehung $k(\mathfrak{q}) = k(\mathfrak{q}(S \otimes_R k(\mathfrak{p})))$ gilt, es also egal ist, ob man den Funktionskörper bei \mathfrak{q} in S oder in der Faser $S \otimes_R k(\mathfrak{p})$ bildet.

Man erhält so die lokale Isomorphie von $A[c]_{x'}$ mit C_x und B_x . Die Existenz eines passenden $g \in B$ aus dem Satz folgt aus dieser lokalen Isomorphie.

Das Polynom $F(T)$ aus dem Satz ist das oben konstruierte Polynom $F(T) \in A[T]$.

1.1.31 Computation of the algebraic de Rham-cohomology **$H_{\text{DR}}^i(X)$.****Mittwoch 14.03.2018**

Let X/k be an algebraic variety over $k = \mathbb{C}$. Consider the sequence $(\Omega_{X|k}^\bullet)$

$$\mathcal{O}_X = \Omega_{X|k}^0 \xrightarrow{d^0} \Omega_{X|k}^1 \xrightarrow{d^1} \Omega_{X|k}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

where $\Omega_{X|k}^p = \bigwedge^p \Omega_{X|k}$ and $d^p : \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|k}^{p+1}$ stands for the exterior derivative. It is k -linear but not \mathcal{O}_X -linear.

One defines the i -th de Rham cohomology of X as

$$H_{\text{DR}}^i(X) = \mathbb{H}^i(\Omega_{X|k}^\bullet)$$

where $\mathbb{H}^i(L^\bullet)$ is the i -th hypercohomology of the complex L^\bullet .

If X is an affine variety, it is

$$\mathbb{H}^i(\Omega_{X|k}^\bullet) = h^i(\Omega_{X|k}^\bullet(X))$$

where $h^i(L^\bullet)$ is the usual i -th cohomology of L^\bullet . This holds, because $H^j(X, \Omega_{X|k}^p) = 0$ for $j > 0$ as $\Omega_{X|k}^p$ is a quasicoherent sheaf on an affine scheme.

Theorem 1.1.5. *Let $U = X - Y$ with $X = \mathbb{A}_k^n$ and $Y = V(f_1, \dots, f_r)$, a closed subscheme of X . It is then possible to compute $H_{\text{DR}}^i(U)$ constructively.*

This is done with D -modules, as described in

Algorithmic Computation of de Rham Cohomology of Complements of Complex Affine Varieties, *U. Walther*, J. Symb. Comput. 29, No. 4–5, 795–839

From

On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *R. Hartshorne*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 45, 5–99

we take, in the situation of the Theorem and with the additional assumption of Y being smooth, the sequence

$$\dots H_q(Y) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X - Y) \rightarrow H_{q-1}(Y) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

where $H_q(W)$ stands for the *de Rham homology* introduced there, and the relations (Proposition 3.4)

$$\begin{aligned} H_q(X) &= H_{\text{DR}}^{2n-q}(X) \\ H_q(Y) &= H_{\text{DR}}^{2r-q}(Y) \end{aligned}$$

with $\dim X = n$ and $\dim Y = r$ hold.

Together this gives

$$\dots \rightarrow H_{\text{DR}}^{2r-q}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q}(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q}(U) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2r-q+1}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2n-q+1}(X) \rightarrow \dots$$

or with $s = \text{codim}(Y, X) = n - r$:

$$\dots \rightarrow H_{\text{DR}}^{q-2s}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(U) \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1-2s}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(X) \rightarrow \dots$$

But now it is $H_{\text{DR}}^q(X) = H_{\text{DR}}^q(\mathbb{A}_k^n) = 0$ for $q > 0$, therefore

$$H_{\text{DR}}^i(Y) = H_{\text{DR}}^{i+2s-1}(U)$$

Because $H_{\text{DR}}^q(U)$ by the Theorem above can be computed for all q , this also holds true for all $H_{\text{DR}}^i(Y)$.

It is now time to discuss the case of a general quasiprojective $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$. We first assume, that X is *smooth*.

We can write

$$X = \bar{X} \cap (\mathbb{P}_k^n - Z) = \bar{X} \cap U$$

with closed schemes $\bar{X}, Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ and $Z = V(g_1, \dots, g_s)$ where g_i are homogeneous polynomials in the coordinate ring of \mathbb{P}_k^n .

Taking the open sets

$$U_i = D_+(g_i) \subseteq \mathbb{P}_k^n$$

the schemes $V_i = U_i \cap X$ are an open cover of X with affine schemes, in X open.

It is even $V_{i_0 \dots i_q} = U_{i_0 \dots i_q} \cap X \subseteq U_{i_0 \dots i_q}$ a closed, smooth, affine subscheme of the affine scheme

$$U_{i_0 \dots i_q} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q} = D_+(g_{i_0} \cdots g_{i_q}).$$

With a Veronese-embedding $v_d : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ where $d = \prod_{\nu=0}^q \deg g_{i_\nu}$, the map

$$v_d : v_d^{-1}(D_+(w)) = U_{i_0 \dots i_q} \rightarrow D_+(w) = \mathbb{A}_k^N$$

is a closed immersion. In the above w is a linear form in the coordinate ring of \mathbb{P}_k^N derived from $\prod_{\nu=1}^q g_{i_\nu}$.

As $i : V_{i_0 \dots i_q} \rightarrow U_{i_0 \dots i_q}$ is a closed immersion, the map

$$v'_d = v_d \circ i : V_{i_0 \dots i_q} \rightarrow U_{i_0 \dots i_q} \xrightarrow{v_d} D_+(w) = \mathbb{A}_k^N$$

is a closed immersion too.

So $V_{i_0 \dots i_q} \cong v'_d(V_{i_0 \dots i_q})$ is even a closed, smooth subscheme of \mathbb{A}_k^N .

By the considerations further above $H_{\text{DR}}^p(V_{i_0 \dots i_q})$ is explicitly computable.

Consider now the Cech-de Rham spectral sequence of the cover $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ of X :

$$E_0^{pq} = \check{C}^q(\mathfrak{V}, \Omega_{X|k}^p) = \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(V_{i_0, \dots, i_q}, \Omega_{X|k}^p)$$

By general theorem E_r^{pq} abuts against the $H_{\text{DR}}^\bullet(X)$:

$$E_r^{pq} \Rightarrow H_{\text{DR}}^\bullet(X)$$

See for this

On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *M. Stevenson*,

http://www-personal.umich.edu/~stevmatt/algebraic_de_rham.pdf
 section 4.1, p. 7.

If one forms E_1^{pq} taking cohomology along the p -axis, the result is

$$E_1^{pq} = \prod_{i_0 < \dots < i_q} H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$$

Keep for this in mind, that, because V_{i_0, \dots, i_q} is affine, the equality

$$H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q}) = \mathbb{H}^p(\Omega_{V_{i_0, \dots, i_q}|k}^\bullet) = h^p(\Gamma(V_{i_0, \dots, i_q}, \Omega_{V_{i_0, \dots, i_q}|k}^\bullet))$$

holds.

As remarked above $H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$ is explicitly computable and, at least theoretically, the abutment $H_{\text{DR}}^\bullet(X)$ of the spectral sequences allows to be effectively computed.

Remark 1.1.5. The advantage of computing with $E_1^{pq} = \prod_{i_0 < \dots < i_q} H_{\text{DR}}^p(V_{i_0, \dots, i_q})$ instead of starting with E_0^{pq} directly, is, that the elements of E_0^{pq} are infinite, but the E_1^{pq} are finite k -modules.

The following Theorem is from Hartshorne's articles cited above (Theorem 4.4):

Theorem 1.1.6. *Let $f : X' \rightarrow X$ be a proper map of schemes, $Y \subseteq X$ a subscheme of X , and $Y' = f^{-1}(Y)$ the preimage-scheme of Y .*

It shall hold

- i) The morphism f maps $X' - Y'$ isomorphically to $X - Y$.*
- ii) Furthermore there are closed immersions $X' \rightarrow Z'$ and $X \rightarrow Z$ into smooth schemes Z', Z , together with a proper morphism $g : Z' \rightarrow Z$ with*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Z' \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

so that $Z' - g^{-1}(Y)$ is mapped isomorphically to $Z - Y$.

Then there is a long exact sequence in de Rham-cohomology

$$\dots \rightarrow H_{\text{DR}}^q(X) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(X') \oplus H_{\text{DR}}^q(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^q(Y') \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(X) \rightarrow \dots \tag{1.160}$$

We can use this theorem, to compute for an arbitrary quasi-projective scheme $X \subseteq \mathbb{P}_k^n = Z$ the cohomologies $H_{\text{DR}}^q(X)$.

We write $X = X_0 \cap U$ with a closed $X_0 \subseteq \mathbb{P}_k^n$ and an open $U \subseteq \mathbb{P}_k^n$.

We find for X_0 a desingularization $f : X'_0 \rightarrow X_0$ together with a proper morphism $g : Z' \rightarrow Z$ with

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \longrightarrow & Z' \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

where the horizontal maps are closed immersions and X'_0 and Z' are smooth schemes. (See the remark after the theorem cited above in Hartshorne's article). The map g is the iterative blow-up in nonsingular subschemes.

The morphism $f : X'_0 \rightarrow X_0$ fulfills the conditions of the above theorem with $X = X_0$, $X' = X'_0$ and $Y = Y_0 \subseteq X_0$, suitable subscheme with $\dim Y_0 < \dim X_0$, and $Y' = Y'_0 = f^{-1}(Y_0)$. One can choose Y_0 to be the subscheme of singular points of X_0 , ("strong desingularization").

Forming the base-extension of g with $U \rightarrow Z$ and those of f with $U \cap X_0 \rightarrow X_0$, we have a compatible system

$$\begin{array}{ccc} X' = f^{-1}(U \cap X_0) & \longrightarrow & g^{-1}(U) \\ f' \downarrow & & g \downarrow \\ X & \longrightarrow & U \end{array}$$

so that the morphism $f' : f^{-1}(U \cap X_0) \rightarrow X$ fulfills the conditions of the theorem above with

$$X = X, \quad X' = f^{-1}(U \cap X_0), \quad Y = Y_0 \cap U, \quad Y' = f'^{-1}(Y_0 \cap U). \quad (1.161)$$

But X' as an open part of X'_0 is a smooth quasi-projective scheme, so that $H_{\text{DR}}^q(X')$ is computable. Also $H_{\text{DR}}^q(Y)$ and $H_{\text{DR}}^q(Y')$ are computable by induction over the dimension of the variety, for which cohomology is to be computed.

The long exact sequence from the theorem above gives therefore conditions, from which $H_{\text{DR}}^q(X)$ can be computed:

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^q(X') \oplus H_{\text{DR}}^q(Y) &\rightarrow H_{\text{DR}}^q(Y') \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(X) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(X') \oplus H_{\text{DR}}^{q+1}(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^{q+1}(Y') \end{aligned} \quad (1.162)$$

So we can compute $H_{\text{DR}}^q(X)$ for all quasiprojective $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$.

1.1.32 Quasi-isomorphe Injektion eines Komplexes in einen Komplex injektiver Objekte Mittwoch 13.06.2018

Es sei \mathbf{A} eine abelsche Kategorie und $\mathbf{C}^+ = C^+(\mathbf{A})$ die Kategorie der Komplexe $(A^\bullet, d^i : A^i \rightarrow A^{i+1})$ mit $A^i = 0$ für $i \ll 0$.

Theorem 1.1.7. *Es existiere für jedes $A \in \text{Obj}(\mathbf{A})$ eine Injektion $0 \rightarrow A \rightarrow I$ in ein injektives Objekt I von \mathbf{A} .*

Dann existiert eine Injektion von Komplexen aus \mathbf{C}^+

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & J^\bullet & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & I^\bullet \oplus J^\bullet & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \longrightarrow & I^\bullet & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{1.171}$$

kommutiert (Hier sind einige Diagrammjagden in den Spalten $r, r + 1, r + 2$ nötig).

Aus den Bedingungen $h^i(X^\bullet) = h^i(I^\bullet)$ und $h^i(Z^\bullet) = h^i(J^\bullet)$ für alle i , kann man auf $h^i(I^\bullet \oplus J^\bullet) = h^i(Y^\bullet)$ für alle i schließen.

Da $I^p = I^p \oplus J^p$, ungeändert für $p < r + 1$, ergibt sich so insgesamt eine Auflösung $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow K^\bullet$, die ein Quasi-Isomorphismus in einen Komplex injektiver Objekte ist.

1.1.33 Natürliche Abbildungen zwischen $H^p F J^\bullet$ und $F H^p J^\bullet$
Donnerstag 14.06.2018

Es sei J^\bullet ein Komplex in einer abelschen Kategorie \mathbf{A} . Dann gilt

Proposition 1.1.6. *Ist $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ein rechtsexakter Funktor, so gibt es eine natürliche Abbildung*

$$F H^p J^\bullet \rightarrow H^p F J^\bullet \tag{1.172}$$

Beweis. Es ist

$$0 \rightarrow B^p J^\bullet \rightarrow Z^p J^\bullet \rightarrow H^p J^\bullet \rightarrow 0$$

und deshalb

$$\begin{array}{ccccccc}
 F B^p J^\bullet & \longrightarrow & F Z^p J^\bullet & \longrightarrow & F H^p J^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 \gamma \downarrow = & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\
 0 & \longrightarrow & B^p F J^\bullet & \longrightarrow & Z^p F J^\bullet & \longrightarrow & H^p F J^\bullet \longrightarrow 0
 \end{array} \tag{1.173}$$

Die Isomorphie γ folgt aus der Anwendung von F auf $J^{p-2} \rightarrow J^{p-1} \rightarrow B^p J^\bullet \rightarrow 0$, was $F J^{p-2} \rightarrow F J^{p-1} \rightarrow F B^p J^\bullet \rightarrow 0$ ergibt, also mit

$$\begin{array}{ccccccc}
 F J^{p-2} & \longrightarrow & F J^{p-1} & \longrightarrow & F B^p J^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow = & & \downarrow = & & \gamma \downarrow = & & \\
 F J^{p-2} & \longrightarrow & F J^{p-1} & \longrightarrow & B^p F J^\bullet & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{1.174}$$

den gesuchten Isomorphismus γ .

Aus $0 \rightarrow Z^p J^\bullet \rightarrow J^p \rightarrow J^{p+1}$ und der Anwendung von F folgt dann

$$\begin{array}{ccccccc}
 F Z^p J^\bullet & \longrightarrow & F J^p & \longrightarrow & F J^{p+1} & & \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow = & & \downarrow = & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^p F J^\bullet & \longrightarrow & F J^p & \longrightarrow & F J^{p+1}
 \end{array} \tag{1.175}$$

Proposition 1.1.7. *Ist $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ein linksexakter Funktor, so gibt es eine natürliche Abbildung*

$$H^p F J^\bullet \rightarrow F H^p J^\bullet \tag{1.176}$$

Beweis. Es ist $0 \rightarrow H^p J^\bullet \rightarrow W^p J^\bullet \rightarrow J^{p+1} \rightarrow 0$ und deshalb

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^p F J^\bullet & \longrightarrow & W^p F J^\bullet & \longrightarrow & F J^{p+1} \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & F H^p J^\bullet & \longrightarrow & F W^p J^\bullet & \longrightarrow & F J^{p+1} \end{array} \tag{1.177}$$

Die Abbildung β ist die gesuchte Abbildung. Die Abbildung α entsteht wie folgt:
Aus der Definition $0 \rightarrow J^{p-1} \rightarrow J^p \rightarrow W^p J^\bullet \rightarrow 0$ und Anwendung von F folgt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F J^{p-1} & \longrightarrow & F J^p & \longrightarrow & W^p F J^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & F J^{p-1} & \longrightarrow & F J^p & \longrightarrow & F W^p J^\bullet \end{array} \tag{1.178}$$

und damit die Definition von α .

1.1.34 Das Poincaré–Lemma

Donnerstag 15.06.2018

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $(\Omega^p(X), d^p : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X))$ der Komplex der p -Formen auf X . Dann existieren Abbildungen

$$k^p : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p-1}(X)$$

so daß

$$dk + kd = \text{id}_{\Omega^p(X)} \tag{1.179}$$

für jedes $p \geq 0$ ist. Wir definieren k^p als \mathbb{R} -lineare Abbildung durch

$$k^p(f(\bar{x}) dx^{i_1, \dots, i_p}) = \sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} \left(\int_{t=0}^1 f(t\bar{x}) t^{p-1} dt \right) x^{i_\nu} dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p} \tag{1.180}$$

Da k und d beide \mathbb{R} -linear sind, brauchen wir nur $(dk + kd)\alpha = \alpha$ für

$$\alpha = f(\bar{x}) dx^{i_1, \dots, i_p}$$

nachrechnen.

Es ist dann der erste Term

$$\begin{aligned}
dk\alpha &= d\left(\sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} \left(\int_0^1 f(t\bar{x})t^{p-1}dt\right) x^{i_\nu} dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p dt\right) x^{i_\nu} dx^j \wedge dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p} + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} \left(\int_0^1 f(t\bar{x})t^{p-1}dt\right) dx^{i_\nu} \wedge dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p} = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p dt\right) x^{i_\nu} dx^j \wedge dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p} + \\
&\quad + p \left(\int_0^1 f(t\bar{x})t^{p-1}dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} \quad (1.181)
\end{aligned}$$

Der zweite Term ist

$$\begin{aligned}
kd\alpha &= k\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(\bar{x})dx^j \wedge dx^{i_1, \dots, i_p}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p x^j dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} + \\
&\quad \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p dt\right) x^{i_\nu} dx^j \wedge dx^{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_p} \quad (1.182)
\end{aligned}$$

Das unterste Glied im zweiten Term und das zweitunterste Glied im ersten Term heben sich bei Addition weg. Es bleibt

$$\begin{aligned}
(dk + kd)\alpha &= \\
&= p \left(\int_0^1 f(t\bar{x})t^{p-1}dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p x_j dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} = \\
&= \left(\int_0^1 \left(f(t\bar{x})pt^{p-1} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(t\bar{x})t^p x^j\right) dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} = \\
&= \left(\int_0^1 \left(f(t\bar{x})pt^{p-1} + \frac{d}{dt}(f(t\bar{x}))t^p\right) dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} = \\
&= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}(f(t\bar{x})t^p) dt\right) dx^{i_1, \dots, i_p} = f(\bar{x})dx^{i_1, \dots, i_p} = \alpha \quad (1.183)
\end{aligned}$$

1.1.35 Affine Torsoren über quasiprojektiven Schemata Donnerstag 12.07.2018

Theorem 1.1.8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine quasiprojektive Varietät über einem Körper k .*

Dann existiert ein affines Schema Y/k und eine Abbildung $Y \rightarrow X$ mit zueinander isomorphen, affinen Fasern F , so daß $Y \rightarrow X$ zugleich ein Torsor über X ist.

Sei zunächst $X = \mathbb{P}_k^n$. Wähle dann $Y = \text{GL}(n + 1, k)$, ein affines Schema gemäß

$$\text{GL}(n + 1, k) = \text{Spec} \left(k[(x_{ij})_{i,j=0,\dots,n}]_{\det(x_{ij})} \right) = \text{Spec} (R).$$

Die Abbildung $\text{GL}(n + 1, k) \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ ist dann

$$(x_{ij}) \mapsto (x_{0j})$$

Die Fasern sind alle untereinander isomorph, denn sie gehen unter Abbildungen $A_{01} \in \text{GL}(n, k)$ mit $A_{01}((x_{0j}^0)) = (x_{0j}^1)$ ineinander über. Eine einzelne Faser über $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_k^n$ wird beschrieben durch die Gleichungen

$$F_{(x_0:\dots:x_n)} = \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

in R und ist daher affin.

Ist nun $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ein projektives Schema mit $X = V(I)$, so ist $Y_X = Y_{\mathbb{P}_k^n} \times_{\mathbb{P}_k^n} X$ ein geeignetes affines Schema, das die Bedingungen für $Y_X \rightarrow X$ erfüllt.

Es bleibt der Fall $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ quasiprojektiv. Wir können $X = \bigcup_{i=0}^r \bar{X}_{f_i}$ als Vereinigung von Hyperflächenkomplementen schreiben. OBdA ist $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d)$ mit einem einheitlichen d .

Es sei dann $Z = \bar{X} \times_k \text{proj} (k[q_0, \dots, q_r])$ und

$$Z' = Z - V(q_0 f_0 + \cdots + q_r f_r) = Z - V(G) = Z_G \subseteq Z$$

ein offenes Unterschema. Es ist dann $Z' \rightarrow X$ eine Abbildung mit isomorphen, affinen Fasern

$$F'_x = k[q_0, \dots, q_r]_{(q_0 f_0(x) + \cdots + q_r f_r(x))}$$

über X .

Wählt man nun $\pi : Y_Z \rightarrow Z$ als affines Schema über dem projektiven Schema Z nach dem oben schon bewiesenen Teil des Satzes, so ist

$$(Y_Z)_{\pi^*(G)} = Y_Z \times_Z Z' \rightarrow Z' = Z_G \rightarrow X$$

ein affines Schema $Y \rightarrow X$ nach den Bedingungen des Satzes.

1.1.36 Computing approximations to the algebraic de Rham cohomology $H_{\text{DR}}^p(X)$ Friday 27.07.2018

Let $\Omega = k[x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n]$ be a commutative algebra in the x_1, \dots, x_n and skew-commutative in e_1, \dots, e_n . Additionally the x_i commute with the e_j .

For the monomial $m = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} e_1^{b_1} \cdots e_n^{b_n}$ we define $\deg_x m = \sum a_i$ and $\deg_e m = \sum b_j$. Let $f \in \Omega$ be a sum of monomials $f = c_1 m_1 + \cdots + c_r m_r$ with monomials $m_i \in \Omega$ and $c_r \in k^*$. Then $\deg_x f = \max_{1 \leq \nu \leq r} \deg_x m_\nu$ and $\deg_e f = \max_{1 \leq \nu \leq r} \deg_e m_\nu$.

Let $R = k[x_1, \dots, x_n]$ and

$$\Omega^p = \{f \in \Omega \mid f \text{ homogeneous in the } e_i \text{ and } \deg_e f = p\}$$

Then $\Omega^p = \Omega_{R|k}^p$ where at the right side stands the p -th exterior power of the module of kähler-differentials of R . So Ω can be identified with the ring of differentials for R (or $\text{Spec}(R)$).

There is a k -linear map $d : \Omega \rightarrow \Omega$ with $df = \sum_{i=1}^n e_i \partial_{x_i} f$ which is the exterior differentiation in the complex $(\Omega^p)_{p=0, \dots, n}$. Especially it is $ddf = 0$ and $d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^p \alpha(d\beta)$ when $\deg_e \alpha = p$ and $\deg_e \beta = q$. We write also $d^p : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ for the restriction of d to Ω^p .

We define

$$\Omega_d^p = F_d \Omega^p = \{f \in \Omega^p \mid f \text{ homogeneous in the } x_i \text{ and } \deg_x f = d\}$$

and additionally

$$\Omega_{\leq d}^p = F_{\leq d} \Omega^p = \{f \in \Omega^p \mid \deg_x f \leq d\}$$

so that $F_{\leq d} \Omega^p = F_d \Omega^p \oplus F_{d-1} \Omega^p \oplus \cdots \oplus F_0 \Omega^p$.

Now let $I = (f_1, \dots, f_s)$ be an ideal of R . We form the Ω -ideal $I' = (f_1, \dots, f_s, df_1, \dots, df_s)$ with the exterior derivative $f \mapsto df$ defined above. It is homogeneous in the e_1, \dots, e_n . Therefore if we define the quotient $\Omega' = (\Omega/I')$ it splits too in p -components by $\deg_e f = p$. As $dI' \subseteq I'$, the exterior derivative d extends to Ω' . We write especially $d^p : \Omega'^p \rightarrow \Omega'^{p+1}$,

So we can calculate $H_{\text{DR}}^p(X)$ for the variety $X = V(I)$ via

$$H_{\text{DR}}^p(X) = (\ker d^p : \Omega'^p \rightarrow \Omega'^{p+1}) / (\text{im } d^{p-1} : \Omega'^{p-1} \rightarrow \Omega'^p)$$

As Ω^p is an infinite dimensional k -vector space, we can try to approximate this definition up to a certain degree of the involved monomials from Ω . We select two numbers $d \geq e > 0$.

Let $i_{e,d} : \Omega_{\leq e}^p \rightarrow \Omega_{\leq d}^p$ be the canonical inclusion.

Next we define

$$N_d = I' \cap \Omega_{\leq d}^p + (d\Omega_{\leq d+1}^{p-1}) \subseteq \Omega_{\leq d}^p$$

and

$$N'_d = I' \cap \Omega_{\leq d}^{p+1} \subseteq \Omega_{\leq d}^{p+1}$$

(note d as an index means the number, in functional position it means the exterior derivative).

Now compute the kernel K_e of $\Omega_{\leq e}^p \xrightarrow{i_{e,d}} \Omega_{\leq d}^p / N_d$ and consider a minimal sub-vector space $M_e \subseteq \Omega_{\leq e}^p$ with $M_e \oplus K_e = \Omega_{\leq e}^p$. Let $M'_{e,d} = i_{e,d}(M_e) \subseteq \Omega_{\leq d}^p$.

Next consider the map of k -vector spaces $\delta : \Omega_{\leq d}^p \rightarrow (\Omega_{\leq d}^{p+1}/N'_d)$ which is induced by the map $d^p : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$. Let δ' be the restriction of δ to $M'_{e,d} \subseteq \Omega_{\leq d}^p$.

Then compute the kernel $H_{e,d}^p$

$$0 \rightarrow H_{e,d}^p \rightarrow M'_{e,d} \xrightarrow{\delta'} (\Omega_{\leq d}^{p+1})/N'_d$$

Then $H_{e,d}^p \subseteq \Omega_{\leq d}^p$ is a k -vector space that approximates the k -vector space $H_{\text{DR}}^p(V(I))$. If one chooses $e \gg 0$ big enough and $d \geq e$ suitable, then $H_{e,d}^p = H_{\text{DR}}^p(V(I))$.

1.1.37 Explizite Darstellung von $\Omega_{X|k}^p$ für eine projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$. Samstag 04.08.2018

Es sei $S = k[x_0, \dots, x_n]$ und $\mathbb{P}_k^n = \text{proj}(S)$ sowie $X = V(I)$ mit einem homogenen Ideal $I = (f_1, \dots, f_s) \subseteq S$.

Dann existieren die Sequenzen:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)e_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)e_n \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0 \tag{1.184}$$

mit $\psi(\sum_{i=0}^n p_i e_i) = \sum_{i=0}^n x_i p_i$, (die sogenannte Euler-Sequenz) abgekürzt als $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$.

Aus ihr folgt durch eine übliche Betrachtung über äußere Potenzen von lokal direkten Summen lokal freier Garben:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \rightarrow \mathcal{E}^{\wedge p} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p-1} \rightarrow 0 \tag{1.185}$$

Es ist also $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p = \ker(\delta^p : \mathcal{E}^{\wedge p} \rightarrow \mathcal{E}^{\wedge p-1})$ der Kern des p -ten Differentials im Koszul-Komplex $(\mathcal{E}^{\wedge p}, \delta^p)_p$ über x_0, \dots, x_n .

Schließlich die Sequenz für Untervarietäten $X = V(I)$

$$I/I^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X|k} \rightarrow 0 \tag{1.186}$$

Wie kann man damit eine möglichst explizite Darstellung von $\Omega_{X|k}^p$ ableiten, für die auch $d^p : \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|k}^{p+1}$ eine einfache Darstellung besitzt?

Man definiere den Ring

$$\Omega = k[x_0, \dots, x_n, e_0, \dots, e_n] \tag{1.187}$$

mit kommutativen Variablen x_i und antikommutativen Variablen e_j sowie $x_i e_j = e_j x_i$.

Es sei $d : \Omega \rightarrow \Omega$ die Abbildung

$$d(f) = \sum_{i=0}^n e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Weiter sei $I' = (f_1, \dots, f_s, df_1, \dots, df_s)$ das von den angegebenen Elementen erzeugte Ω -Ideal.

Nun sei $\Omega' = \Omega/I'$. Wir definieren eine Abbildung $i : \Omega \rightarrow \Omega$, nämlich das „innere Produkt mit $x_0e_0^* + \dots + x_n e_n^*$ “ als S -lineare Abbildung mit

$$i(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum_{\nu=1}^p (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

Es ist $i(I') \subseteq I'$ und damit auch $i' : \Omega' \rightarrow \Omega'$, induziert von i , wohldefiniert.

Es seien Ω^p die Elemente vom Grad p in den e_i , also das S -Ideal, das von $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ erzeugt wird. Da I' ein in den e_i homogenes Ideal ist, ist auch Ω'^p wohldefiniert. Die Abbildung i' erfüllt $i' : \Omega'^p \rightarrow \Omega'^{p-1}$.

Nun gilt

$$(*) \quad \Omega_{X|k}^p = \ker(i' : \Omega'^p \rightarrow \Omega'^{p-1}) \quad (1.188)$$

Was die Darstellung von $d^p : \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|k}^{p+1}$ angeht, so entsteht sie wie folgt:

Es sei $\alpha = \sum f_{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p}$ mit $f_{i_1 \dots i_p} \in S$. Dann sei

$$\theta\alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} e_j \wedge e_{i_1 \dots i_p}$$

Man rechnet aus (für $f_{i_1 \dots i_p}$ homogen in S vom Grad r):

$$(\theta i + i\theta)\alpha = (r + p)\alpha$$

für alle p .

Weiter sei

$$\vartheta_k \alpha = \sum_{i_1 \dots i_p} \frac{f_{i_1 \dots i_p}}{x_k} e_k \wedge e_{i_1 \dots i_p}$$

Man rechnet wieder aus

$$(\vartheta_k i + i\vartheta_k)\alpha = \alpha$$

Also ist $\delta = \theta - (r + p)\vartheta_k$ ein Operator mit $i\delta = \delta i$.

Es gilt

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(U_k) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\wedge p}(U_k) & \xrightarrow{i} & \mathcal{E}^{\wedge p-1}(U_k) \\ & & \downarrow d^p & & \downarrow \delta'^p & & \downarrow \delta'^{p-1} \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p+1}(U_k) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\wedge p+1}(U_k) & \xrightarrow{i} & \mathcal{E}^{\wedge p}(U_k) \end{array}$$

Dabei ist

$$\delta'^p \left(\sum_{i_1 \dots i_p} \frac{f_{i_1 \dots i_p}}{x_k^{r+p}} e_{i_1 \dots i_p} \right) = \frac{\delta^p \left(\sum_{i_1 \dots i_p} f_{i_1 \dots i_p} e_{i_1 \dots i_p} \right)}{x_k^{r+p}}$$

denn es ist

$$d\left(\frac{f_{i_1 \dots i_p}}{x_k^{r+p}} e_{i_1 \dots i_p}\right) = \frac{df_{i_1 \dots i_p}}{x_k^{r+p}} - \frac{f_{i_1 \dots i_p}}{x_k} (r+p) \frac{1}{x_k^{r+p}} e_k$$

Wenn wir nicht auf U_k sondern auf $U_{j_0 \dots j_q} = D_+(x_{j_0} \cdots x_{j_q})$ arbeiten wollen, so beginnen wir mit (es ist $g = x_{j_0} \cdots x_{j_q}$)

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i_1 \dots i_p} \frac{f_{i_1 \dots i_p}}{g^w} e_{i_1 \dots i_p}\right) &= \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_j \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} \frac{1}{g^w} e_j \wedge e_{i_1 \dots i_p} + \sum_{i_1 \dots i_p} \frac{f}{g^w} w \frac{dg}{g} e_{i_1 \dots i_p} = \\ &= \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_j \frac{\partial f_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} \frac{1}{g^w} e_j \wedge e_{i_1 \dots i_p} + \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_{\alpha=0}^q \frac{f}{g^w} w \frac{1}{x_{j_\alpha}} e_{j_\alpha} e_{i_1 \dots i_p} = \end{aligned} \quad (1.189)$$

Also ist jetzt

$$\delta = \theta - w \sum_{\alpha=0}^q \vartheta_{x_{j_\alpha}}$$

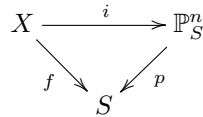
mit $\delta i = i \delta$ und für $\beta = \sum \frac{f_{i_1 \dots i_p}}{g^w} e_{i_1 \dots i_p}$ mit $\deg_x f_{i_1 \dots i_p} = r$

$$d(\beta) = \frac{\delta(\beta)}{g^w}$$

Es gilt dabei die Beziehung $w(q+1) = r+p$.

1.1.38 Der Gauss–Manin Zusammenhang für eine glatte projektive Familie $X \rightarrow S$. Freitag 10.08.2018

Es sei $f : X \rightarrow S$ eine glatte projektive Familie, im Dreieck



mit S/k einer eindimensionalen, affinen, regulären Kurve, z.B. $S = \text{Spec}(k[s])$. Da X/S glatt, ist die Sequenz

$$0 \rightarrow f^* \Omega_{S|k} \rightarrow \Omega_{X|k} \rightarrow \Omega_{X|S} \rightarrow 0 \quad (1.190)$$

exakt und $f^* \Omega_{S|k}$ ist ein Vektorbündel vom Rang 1 auf X .

Wir haben dann die übliche Filtrierung $F^i \Omega_{X|k}^p$, bestehend aus Elementen, die lokal wenigstens i Faktoren aus dem Unterbündel $f^* \Omega_{S|k} \subseteq \Omega_{X|k}$ enthalten. Man hat dann die Quotienten

$$0 \rightarrow F^1 \Omega_{X|k}^p \rightarrow F^0 \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|S}^p \rightarrow 0 \quad (1.191)$$

$$0 \rightarrow F^2 \Omega_{X|k}^p \rightarrow F^1 \Omega_{X|k}^p \rightarrow f^* \Omega_{S|k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|S}^{p-1} \rightarrow 0 \quad (1.192)$$

...

$$0 \rightarrow F^{i+1} \Omega_{X|k}^p \rightarrow F^i \Omega_{X|k}^p \rightarrow \bigwedge^i (f^* \Omega_{S|k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|S}^{p-i} \rightarrow 0 \quad (1.193)$$

Nun ist aber $\bigwedge^i f^* \Omega_{S|k} = 0$ für $i \geq 2$ und damit $F^2 \Omega_{X|k}^p = \dots = F^{p+1} \Omega_{X|k}^p = 0$.

Also bleibt aus (1.191) lediglich die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow f^* \Omega_{S|k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|S}^{p-1} \rightarrow \Omega_{X|k}^p \rightarrow \Omega_{X|S}^p \rightarrow 0 \quad (1.194)$$

zurück.

Benutzt man $\mathbb{R}f_* \Omega_{X|S}^\bullet = H_{\text{DR}}^\bullet(X/S)$, so entsteht eine Abbildung für die ganze de Rham Kohomologie:

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^\bullet(X/S) &= \mathbb{R}f_* \Omega_{X|S}^\bullet \rightarrow \mathbb{R}f_*(f^* \Omega_{S|k} \otimes \Omega_{X|S}^{\bullet-1})[1] = \\ &= \Omega_{S|k} \otimes \mathbb{R}f_* \Omega_{X|S}^\bullet = \Omega_{S|k} \otimes H_{\text{DR}}^\bullet(X/S) \end{aligned} \quad (1.195)$$

Wir bemerken, daß wegen der Hodge-Zerlegung

$$H_{\text{DR}}^r(X_s/k(s)) = \bigoplus_{p+q=r} H^q(X_s, \Omega_{X_s|k(s)}^p) = \bigoplus_{p+q=r} H^q(X, \Omega_{X|S}^p \otimes k(s)) \quad (1.196)$$

über $s \in S$ und weil $X_s \cong X_{s'}$ als Mannigfaltigkeiten isomorph sind, die (prinzipiell nur oberhalbstetigen) lokalen Ränge

$$\text{rang}(H^q(X_s, \Omega_{X_s|k(s)}^p) = H^q(X, \Omega_{X|S}^p \otimes k(s)))$$

konstant sind. Damit ist $R^q f_* \Omega_{X|S}^p$ ein Vektorbündel über S (nach den Halbstetigkeitssätzen) und es gilt

$$H^a(X_s, \Omega_{X_s|k(s)}^b) = (R^a f_* \Omega_{X|S}^b) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) \quad (1.197)$$

für alle a, b .

Es ist nun $H_{\text{DR}}^r(X/S) = \mathbb{R}^r f_*(\Omega_{X|S}^\bullet)$ und man hat daher die erste Spektralsequenz für Hyperkohomologie

$$E_1^{pq} = (R^q f_* \Omega_{X|S}^p) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega_{X|S}^\bullet) = H_{\text{DR}}^{p+q}(X/S) \quad (1.198)$$

Über jedem $s \in S$ gibt es dann die „gewöhnliche“ Hodge-de Rham Spektralsequenz für $X_s/k(s)$, die wir als

$$E_1^{pq}(k(s)) = (H^q(X_s, \Omega_{X_s|k(s)}^p) = H^q(X, \Omega_{X|S}^p \otimes k(s)) \Rightarrow H_{\text{DR}}^{p+q}(X_s) \quad (1.199)$$

schreiben.

Behauptung: Das Differential $d_1^{pq} = \delta : E_1^{pq} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ entartet. Es ist nämlich eine Abbildung $\delta : R^q f_* \Omega_{X|S}^p \rightarrow R^q f_* \Omega_{X|S}^{p+1}$. Man tensoriert nun mit $k(s)$ für $s \in S$ und erhält unter Beachtung von (1.197) die Abbildung

$$\delta \otimes k(s) : H^q(X_s, \Omega_{X_s|s}^p) \rightarrow H^q(X_s, \Omega_{X_s|s}^{p+1}).$$

Man nimmt nun $\delta \otimes k(s) = d_1^{pq}(k(s))$ an und beachtet die Degeneration von $E_1^{pq}(k(s))$, so daß $\delta \otimes k(s) = 0$ für alle $s \in S$ wird. Indem man δ als Element von $(R^q f_* \Omega_{X|S}^p)^\vee \otimes (R^q f_* \Omega_{X|S}^{p+1})$ auffaßt, ergibt sich $\delta = 0$ (Nakayama mit $\delta \otimes k(s) = 0$ für alle s), also $E_2^{pq} = E_1^{pq}$.

Es fehlt jetzt noch der Beweis, daß alle $d_r^{pq} : E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ gleich Null sind. Kann man dies entsprechend durch eine Betrachtung über $s \in S$, tensorieren mit $k(s)$ usw. erreichen? (Die E_r^{pq} sind ja kraft Induktion gleich E_1^{pq} , also Vektorbündel). Man nimmt also $d_r^{pq} \otimes k(s) = d_r^{pq}(k(s))$ an, wobei $d_r^{pq}(k(s)) : H^q(X_s, \Omega_{X_s|s}^p) \rightarrow H^{q-r+1}(X_s, \Omega_{X_s|s}^{p+r})$ die Abbildung aus der Hodge-de-Rham S-S $E_r^{pq}(k(s))$ für X_s auf Level r sein soll. Dann wäre wieder $d_r^{pq} \otimes k(s) = 0$ und mit demselben Argument wie oben auch $d_r^{pq} = 0$.

Die Begründung für $d_r^{pq} \otimes k(s) = d_r^{pq}(k(s))$ kann (vielleicht?) wie folgt gegeben werden: Man beginnt mit der Seite E_0^{pq} aus der Cech-Kohomologie

$$E_0^{pq} = \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p)$$

und schreibt die davon und von d_0^{pq} abhängende Seite E_r^{pq} als $E_r(E_0)$.

Man hat dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_r(E_0(k(s))) & \xrightarrow{d_r(k(s))=0} & E_r(E_0(k(s))) & (1.200) \\ \uparrow = & & \uparrow = & \\ E_r(E_0 \otimes k(s)) & \xrightarrow{d_r(E_0 \otimes k(s))} & E_r(E_0 \otimes k(s)) & \\ \uparrow \alpha_r & & \uparrow \alpha_r & \\ E_r(E_0) \otimes k(s) & \xrightarrow{d_r \otimes k(s)} & E_r(E_0) \otimes k(s) & \end{array}$$

In diesem Diagramm existieren die α_r immer, sie bilden einen „Zick-Zack“ in E_0 , der für ein Element in $E_r(E_0)$ steht, tensoriert mit $k(s)$, auf einen „Zick-Zack“ in $E_0 \otimes k(s)$, der zu $E_r(E_0 \otimes k(s))$ gehört, ab.

Ebenso haben wir Diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_r(E_0 \otimes k(s)) & \xleftarrow{\cong} Z_r(E_0 \otimes k(s)) \longrightarrow & E_{r+1}(E_0 \otimes k(s)) & (1.201) \\ \uparrow \alpha_r & & \uparrow \alpha_{r+1} & \\ E_r(E_0) \otimes k(s) & \xleftarrow{\cong} Z_r(E_0) \otimes k(s) \longrightarrow & E_{r+1}(E_0) \otimes k(s) & \end{array}$$

Nun ist α_1 ein Isomorphismus, also $d_1 \otimes k(s) = d_1(k(s)) = 0$. Damit ist $d_1 = 0$ und $E_2 = E_1$. Also $Z_1(E_0) = E_1(E_0)$ und im obigen Diagramm stehen waagrecht nur Isomorphismen und α_1 sowie $\alpha'_1 = \alpha_1$ sind auch Isomorphismen. Also ist α_2 ein Isomorphismus. Es folgt dann $d_2 \otimes k(s) = d_2(k(s))$ usw.

Damit gibt es aus der S-S E_1^{pq} eine Filtrierung $F^p H_{\text{DR}}^r(X/S)$ mit den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow F^{p+1} H_{\text{DR}}^r(X/S) \rightarrow F^p H_{\text{DR}}^r(X/S) \rightarrow R^q f_* \Omega_{X|S}^p \rightarrow 0 \quad (1.202)$$

und induktiv eine Darstellung

$$H_{\text{DR}}^r(X/S) = \bigoplus_{p+q=r} R^q f_* \Omega_{X|S}^p \quad (1.203)$$

denn es ist für exakte Sequenzen von Vektorbündeln $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ auf S immer $F = F' \oplus F''$ (wegen $\text{Ext}^1(F'', F') = 0$).

Gauss–Manin-Zusammenhang

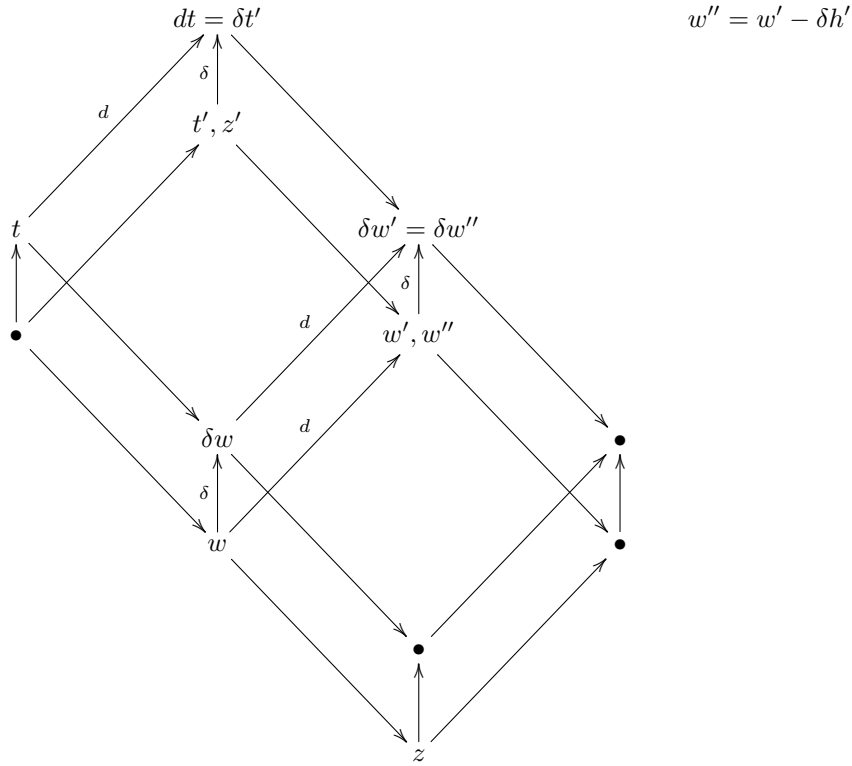
Man hat nun das Diagramm (durch Anwendung von $\check{C}^q((U_i), -)$ auf die Sequenz (1.194) für p und $p+1$):

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_{i_0 < \dots < i_q} \Omega_S(S) \otimes_S \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^{p-1}) & \xrightarrow{d} & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Omega_S(S) \otimes_S \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p) \\
\downarrow \beta' = \beta_q & & \downarrow \beta = \beta_q \\
\prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_X^p) & \xrightarrow{d} & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_X^{p+1}) \\
\downarrow \alpha = \alpha_q & & \downarrow \alpha' = \alpha'_q \\
\prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p) & \xrightarrow{d} & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^{p+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array} \quad (1.204)$$

Man beginnt nun mit einem Repräsentanten $z \in \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p)$ für $H^q(X, \Omega_{X|S}^p)$ und wählt ein Urbild w mit $\alpha(w) = z$. Dann bildet man $w' = dw$ und wählt ein Urbild $z' \in \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Omega_S(S) \otimes_S \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p)$ mit $\beta(z') = w'' = w' - \delta h'$ mit einem noch zu bestimmenden h' . Dies ist möglich, weil $dz = 0$ in $H^q(X, \Omega_{X|S}^{p+1})$. Man kann also $dz = \delta h$ schreiben mit $h \in \prod_{i_0 < \dots < i_{q-1}} \Gamma(U_{i_0 \dots i_{q-1}}, \Omega_{X|S}^{p+1})$. Dann ist $h = \alpha'_{q-1} h'$ mit

$h' \in \prod_{i_0 < \dots < i_{q-1}} \Gamma(U_{i_0 \dots i_{q-1}}, \Omega_X^{p+1})$. Ersetzt man w' durch $w'' = w' - \delta h'$, so ist $\alpha'(w'') = 0$, also $\beta(z') = w''$.

Man muß aber auch noch fordern, daß $\delta(w'' - \beta_q t') = 0$ ist. Nun ist $\alpha_{q+1} \delta w = 0$, also $\delta w = \beta'_{q+1} t$. Nun ist aber $\delta t = 0$ und t ein Repräsentant von $H^{q+1}(X, \Omega_{X|S}^{p-1}) \otimes \Omega_S(S)$. Es ist deshalb wieder $dt = 0$ als Element von $H^{q+1}(X, \Omega_{X|S}^p) \otimes \Omega_S(S)$, also $dt = \delta t'$ mit $t' \in \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Omega_S(S) \otimes \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^p)$. Es ist dann, wie man durch eine Diagrammjagd einsieht $\delta(-\beta(t') + w'') = 0$.



(1.205)

Also ist auch $\delta(-t' + z') = 0$ und somit liegt das Element $-t' + z'$ in $\Omega_S(S) \otimes_S H^q(X, \Omega_{X|S}^p)$. Damit hat man eine Abbildung (für $p \geq 1$):

$$\begin{aligned} \delta^{p,q} : H^q(X, \Omega_{X|S}^p) &\rightarrow \\ \Omega_S(S) \otimes_S H^q(X, \Omega_{X|S}^p) \oplus \Omega_S(S) \otimes_S H^{q+1}(X, \Omega_{X|S}^{p-1}) & \\ \delta^{p,q}(z) = (-t' + z', t) & \quad (1.206) \end{aligned}$$

Es bleibt noch der Fall $p = 0$ zu untersuchen. Man hat hier die Sequenz (1.190) und wendet wieder $\tilde{C}^q((U_i), -)$ an. Es ergibt sich ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& & 0 \\
& & \downarrow \\
& & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Omega_S(S) \otimes_S \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{O}_X) \\
& & \downarrow \beta = \beta_q \\
\prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_X^1) \\
\downarrow \alpha = \alpha_q & & \downarrow \alpha' = \alpha'_q \\
\prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & \prod_{i_0 < \dots < i_q} \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \Omega_{X|S}^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array} \tag{1.207}$$

Eine Diagrammjagd wie oben führt von einem $z \in H^q(X, \mathcal{O}_X)$ zu einem $z' \in \mathcal{O}_S(S) \otimes_S H^q(X, \mathcal{O}_X)$ und legt damit eine Abbildung $\delta^{0,q}$ fest:

$$\delta^{0,q} : H^q(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_S(S) \otimes_S H^q(X, \mathcal{O}_X), \quad \delta^{0,q}(z) = z' \tag{1.208}$$

Die Gesamtheit der $\delta^{p,q}$ definiert den Gauss–Manin–Zusammenhang

$$\nabla : H_{\text{DR}}^r(X/S) \rightarrow \mathcal{O}_S(S) \otimes_S H_{\text{DR}}^r(X/S) \tag{1.209}$$

denn es ist ja nach den Überlegungen im vorigen Abschnitt $H_{\text{DR}}^r(X/S) = \bigoplus_{p+q=r} H^q(X, \mathcal{O}_{X|S}^p)$

Funktionalanalysis

2.1 Metrische Räume

Proposition 2.1.1. *Es seien x, x', y, y' vier Punkte eines metrischen Raums (X, d) . Dann gelten die Ungleichungen:*

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \quad (2.1)$$

$$|d(x', y') - d(x, y)| \leq d(x', x) + d(y', y) \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

Beweis. Die erste Ungleichung folgt aus $d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y')$ und $d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, y')$. Die zweite folgt aus der ersten, indem man diese als $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x', x) + d(y', y)$ schreibt und mit der Substitution $x \leftrightarrow x'$ und $y \leftrightarrow y'$ daraus $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x', x) + d(y', y)$ gewinnt.

Proposition 2.1.2. *Die Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem metrischen Raum $X \times X$ mit der Metrik $d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ ist stetig.*

Weiterhin ist für jedes $x \in X$ die partielle Abbildung $d(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der zweiten Ungleichung oben, die zweite aus der Stetigkeit von $d(x, y)$ oder ebenfalls aus der zweiten Ungleichung mit $x = x'$.

Proposition 2.1.3. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq X$, offen, sowie $x_0 \in X$. Dann kann man eine offene Kugel $B(x_0, r) \subseteq U$ wählen, für die der Abschluß $\overline{B(x_0, r)} \subseteq U$ ist.*

Beweis. Es sei $B(x_0, 2r) \subseteq U$ für ein geeignetes r . Dann ist $\overline{B(x_0, r)} \subseteq B_{\leq r}(x_0) \subseteq B(x_0, 2r) \subseteq U$.

Anmerkung 2.1.1. Es seien für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen $f^+ = \sup(f, 0)$ und $f^- = -\inf(f, 0)$ eingeführt.

Dann ist $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ und $\sup(f, g) = \left| \frac{f+g}{2} \right| + \left| \frac{f-g}{2} \right|$ sowie $\inf(f, g) = \left| \frac{f+g}{2} \right| - \left| \frac{f-g}{2} \right|$.

2.2 Normierte Räume

Definition 2.2.1. Es sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

mit den Eigenschaften

$$\|x\| \geq 0 \quad (2.5)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (2.6)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2.7)$$

mit $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Seminorm auf E . Gilt überdies

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (2.8)$$

so heißt $\|\cdot\|$ eine Norm auf E und E heißt normierter Raum.

Korollar 2.2.1. Ist E ein normierter Raum, so ist

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.9)$$

eine Metrik auf E , die somit eine Topologie induziert.

Korollar 2.2.2. Die Räume \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} sind mit $|\cdot|$ als Norm jeweils normierte \mathbb{R} - bzw. \mathbb{R} - und \mathbb{C} -Vektorräume.

Proposition 2.2.1. In einem normierten Raum E gilt für $x, y \in E$ und $r \geq 0$ die Beziehung

$$B_{<r}(x + y) = B_{<r}(x) + y \quad (2.10)$$

Proposition 2.2.2. In einem normierten Raum sind die offenen Kugeln $B_{<r}(x)$ konvex.

Beweis. Es genügt dies für $x = 0$ zu beweisen. Seien $x, y \in B_{<r}(0)$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ sowie $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$.

Dann ist

$$\|z\| \leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| = \alpha \|x\| + (1 - \alpha) \|y\| < \alpha r + (1 - \alpha)r = r$$

Proposition 2.2.3. Es gilt für einen normierten Raum E und $x, y \in E$:

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right| \quad (2.11)$$

Proposition 2.2.4. Sind E und F normierte Räume, so auch $E \times F$ mit

$$\|(e, f)\|_{E \times F} := \|e\|_E + \|f\|_F \quad (2.12)$$

Proposition 2.2.5. *Es sei E ein normierter Raum. Dann gilt: Die Abbildungen*

$$x \mapsto \|x\|: E \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$(\lambda, x) \mapsto \|\lambda x\|: \mathbb{K} \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

sind stetig.

Definition 2.2.2. *Es seien E, F zwei normierte \mathbb{K} -Vektorräume. Dann sei $L(E, F)$ die Menge der stetigen, \mathbb{K} -linearen Abbildungen von E nach F .*

Proposition 2.2.6. *Eine lineare Funktion $f: E \rightarrow F$ ist genau dann stetig, wenn (äquivalent)*

a) für alle $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$f(B_{<\delta}(x)) \subseteq B_{<\varepsilon}(f(x)) \quad (2.13)$$

b) für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$f(B_{<\delta}(0_E)) \subseteq B_{<\varepsilon}(0_F) \quad (2.14)$$

c) es ein $C > 0$ gibt, mit

$$\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E \quad (2.15)$$

für alle $x \in E$.

Proposition 2.2.7. *Es seien E, F zwei normierte \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist auch $L(E, F)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum mit der Norm*

$$\|f\| := \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \quad (2.16)$$

für $f \in L(E, F)$.

Definition 2.2.3. *Es sei E ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum. Dann ist*

$$E^\vee := L(E, \mathbb{K}) \quad (2.17)$$

der Dualraum von E . Ein $l \in E^\vee$ heißt stetiges Funktional auf E .

Lemma 2.2.1. *Es sei E ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $V \subseteq E$ ein Teilraum. Weiter sei $f \in L(V, \mathbb{R})$ ein Funktional mit*

$$|f(x)| \leq C\|x\|$$

für alle $x \in V$.

Dann existiert für jedes $y \in E$ und $y \notin V$ auf dem Teilraum $W = V + \mathbb{R}y$ ein Funktional $f' \in L(W, \mathbb{R})$ mit

$$f'|_V = f \quad (2.18)$$

$$|f'(x)| \leq C\|x\| \quad (2.19)$$

für alle $x \in W$.

Beweis.

Theorem 2.2.1 (Hahn-Banach). *Es sei E ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $H \subseteq E$ ein Unterraum. Weiter sei*

$$l \in L(H, \mathbb{R})$$

ein stetiges Funktional auf H mit

$$\|l\| \leq C,$$

also $|l(x)| \leq C\|x\|$ für alle $x \in H$.

Dann existiert eine Fortsetzung $l' \in L(E, \mathbb{R})$ mit

1. $l'(x) = l(x)$ für alle $x \in H$, also

$$l'|_H = l$$

2. $|l'(x)| \leq C\|x\|$ für alle $x \in E$, also

$$\|l'\| \leq C$$

2.3 Hilberträume

2.3.1 Skalarprodukt

Definition 2.3.1. *Es sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

eine Abbildung mit den Eigenschaften

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \tag{2.20}$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \tag{2.21}$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \tag{2.22}$$

für $x, x', y \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für \mathbb{K} -Bilinearform bzw. für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch Sesquilinearform. Eine andere Bezeichnung ist Skalarprodukt.

Korollar 2.3.1. *Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform oder Sesquilinearform auf dem Vektorraum H . Dann ist*

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$$

für $x, y, y' \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Wegen $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ist $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, so daß wir definieren können:

Definition 2.3.2. *Es sei \langle, \rangle eine Bilinearform auf dem \mathbb{K} -Vektorraum H . Ist*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, für alle $x \in H$, so heißt \langle, \rangle positiv-semidefinit.
2. $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ aus H , so heißt \langle, \rangle positiv-definit.

Definition 2.3.3. *Für eine positiv-semidefinite \mathbb{K} -Bilinearform \langle, \rangle definieren wir $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$.*

Proposition 2.3.1 (Cauchy-Schwarz Ungleichung). *Es sei \langle, \rangle eine positiv-semidefinite \mathbb{K} -Bilinearform auf H . Dann gilt*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{2.23}$$

für alle $x, y \in H$.

Beweis.

Es leitet sich daraus ab:

Proposition 2.3.2. *Es sei \langle, \rangle eine positiv-semidefinite \mathbb{K} -Bilinearform auf H . Dann ist*

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2} \tag{2.24}$$

eine Seminorm.

Beweis. Wir müssen $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ zeigen. Dies ist äquivalent zu:

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Ausrechnen der rechten Seite liefert

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \geq \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

womit die Ungleichung gezeigt ist.

Proposition 2.3.3. *Es sei \langle, \rangle eine \mathbb{K} -Bilinearform auf H . Dann ist*

$$\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

stetig bezüglich der Topologie, die $\|\cdot\|$ auf H und damit auf $H \times H$ induziert.

Beweis. Es sei $\|x - x'\| < \varepsilon_1$ und $\|y - y'\| < \varepsilon_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x', y' \rangle| &= |\langle x - x', y \rangle + \langle x', y - y' \rangle| \leq \|x - x'\|\|y\| + \|x'\|\|y - y'\| \leq \\ &\leq \|x - x'\|\|y\| + (\|x\| + \|x - x'\|)\|y - y'\| \leq \|y\|\varepsilon_1 + \|x\|\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Für festes $x, y \in H$ wird der letzte Ausdruck für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, genügend klein, kleiner als jedes $\delta > 0$.

Proposition 2.3.4. *Es sei $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm auf dem \mathbb{K} -Vektorraum H . Dann ist äquivalent*

a) *Die Gleichung (Parallelogrammidentität)*

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.27)$$

ist für alle $x, y \in H$ erfüllt.

b) *Es gibt eine \mathbb{K} -Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ und es gilt*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (2.28)$$

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bzw.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \quad (2.29)$$

für alle $x, y \in H$.

Beweis. Es ist (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\Re\langle x, y \rangle \quad (2.30)$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle x + iy, x + iy \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, iy \rangle + \langle iy, x \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + (-i)(\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle) = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\Im\langle x, y \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

Also ist, wenn man von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgeht, die Beziehung (2.29) erfüllt (man ersetze in den zwei vorigen Gleichungen y jeweils durch $-y$ und summiere passend). Die Erfüllung von (2.28) ist noch einfacher nachzurechnen.

Wir gehen nun umgekehrt von (2.29) aus und versuchen die Skalarprodukteigenschaft des so definierten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nachzuweisen.

Wir zeigen nacheinander

- i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
- ii) $\langle ix, y \rangle = i\langle x, y \rangle$
- iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Dabei setzen wir zunächst in (2.29) ein und reduzieren dann mit Substitutionen der Form

$$\|a + b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - \|a - b\|^2$$

für geeignete $a, b \in H$, die mit Ausdrücken aus x und y gebildet werden. Wir verdrängen dadurch Summen als Argumente von $\|\cdot\|^2$ durch ihre Summanden bis sich alles auf Null reduziert. Dabei ist auch $\|\epsilon a\|^2 = \|a\|^2$ für $\epsilon = \pm 1, \pm i$ heranzuziehen.

Es fehlen dann noch die Beziehungen $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ und $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Diese folgen aus der oben gezeigten Additivität von $\langle x, y \rangle$ im ersten und zweiten Argument, sowie aus der Stetigkeit. Es nämlich nach allgemeinen Überlegungen für eine stetige Funktion $F : H \rightarrow \mathbb{K}$ mit $F(x + y) = F(x) + F(y)$ immer $F(m/nx) = m/nF(x)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ und aus Stetigkeitsgründen $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mit den Beziehungen für $\langle ix, y \rangle$ und $\langle x, iy \rangle$ von oben ist dann sogar $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und entsprechend $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.

2.3.2 Darstellungssatz

Theorem 2.3.1. *Es sei H ein Hilbertraum. Die Abbildung*

$$j : H \rightarrow H^\vee, \quad x \mapsto j(x) : y \mapsto \langle y, x \rangle \quad (2.32)$$

ist

1. \mathbb{R} -linear bzw. \mathbb{C} -antilinear.
2. stetig.
3. isometrisch und damit injektiv.
4. surjektiv.

Damit ist sie ein (Anti-)Isomorphismus $j : H \rightarrow H^\vee$.

Korollar 2.3.2. *Die Abbildung $H \rightarrow H^{\vee\vee}$ ist $j^\vee \circ j$ und damit ein isometrischer Isomorphismus.*

2.3.3 Orthonormalbasen

Definition 2.3.4. *Es sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Folge von Elementen $x_i \in H$. Dann schreiben wir*

$$x = \sum_{i \in I} x_i \quad (2.33)$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J_\varepsilon \subseteq I$ existiert, so daß für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $I \supseteq J \supseteq J_\varepsilon$ gilt

$$\|x - \sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon \quad (2.34)$$

Wir nennen dann $(x_i)_{i \in I}$ summierbar mit Summe x .

Proposition 2.3.5. *Es sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Folge in H . Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ summierbar genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $J_\varepsilon \subseteq I$ gibt, so daß für jedes endliche $J \subseteq I$ mit $J \cap J_\varepsilon = \emptyset$ gilt*

$$\|\sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon \quad (2.35)$$

Proposition 2.3.6. *Es sei $x = \sum_{i \in I} x_i$ und $y = \sum_{i \in I} y_i$. Dann ist*

$$\lambda x = \sum_{i \in I} \lambda x_i \quad (2.36)$$

$$x + y = \sum_{i \in I} (x_i + y_i) \quad (2.37)$$

$$\langle x, z \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, z \rangle \quad (2.38)$$

Definition 2.3.5. Es sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Folge in H . Dann heißt $(x_i)_{i \in I}$

1. orthogonal, falls $x_i \perp x_j$ für $i \neq j \in I$
2. orthonormal, falls $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal ist und $\|x_i\| = 1$ für alle $i \in I$ gilt.

Proposition 2.3.7. Es sei $(x_i)_{i \in I}$ eine orthogonale Folge im Hilbertraum H . Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ genau dann summierbar, wenn

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 \quad (2.39)$$

existiert (im reellen Hilbertraum \mathbb{R}). Es ist dann auch

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 \quad (2.40)$$

für $x = \sum_{i \in I} x_i$.

Proposition 2.3.8. Es sei $(x_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Folge im Hilbertraum H . Dann ist

$$\sum_{i \in I} |\langle x_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2.41)$$

für jedes $x \in H$ (Besselsche Ungleichung).

Weiterhin ist

$$\sum_{i \in I} |\langle x_i, x \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (2.42)$$

(Parsevalsche Gleichung) genau dann, wenn

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad (2.43)$$

ist.

Theorem 2.3.2. Es sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Folge. Dann ist äquivalent

- a) Es ist $(x_i)_{i \in I}$ eine maximale orthonormale Folge.
- b) Ist $x \perp x_i$ für ein $x \in H$ und für alle $i \in I$, so ist $x = 0$.
- c) Es gibt einen Isomorphismus von Hilberträumen

$$H = \sum_{i \in I} \mathbb{K} \cdot x_i \quad (2.44)$$

d) Es ist für $x, y \in H$ stets

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle \quad (2.45)$$

e) (Fourierentwicklung) *Es ist für jedes $x \in H$*

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad (2.46)$$

f) (Parsevalsche Gleichung) *Es ist für jedes $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \quad (2.47)$$

2.3.4 Hermitesche Operatoren

2.4 Das Lebesgue-Integral

2.4.1 Maße

Es stehe $\langle a, b \rangle$ für eines der vier Intervalle $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) .

Es sei \mathfrak{S} die Menge der beschränkten Intervalle

$$\prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

Eine Funktion $\varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *monoton*, falls

$$I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \varphi(I_1) \leq \varphi(I_2)$$

gilt.

- *additiv*, falls für $I = I_1 \cup I_2$

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow \varphi(I_1 \cup I_2) = \varphi(I_1) + \varphi(I_2)$$

gilt

- *regulär*, falls für jedes $I \in \mathfrak{S}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein offenes $I^* \supseteq I$ mit $I^* \in \mathfrak{S}$ existiert, so daß

$$\varphi(I) \leq \varphi(I^*) < \varphi(I) + \varepsilon$$

ist.

Definition 2.4.1. *Eine monotone, additive, reguläre Funktion $\varphi : \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Maß auf \mathbb{R}^n .*

2.4.2 Nullmengen

Definition 2.4.2. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge bezüglich eines Maßes φ , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge beschränkter Intervall $I_k \in \mathfrak{S}$ gibt, für die

$$M \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_k \quad (2.48)$$

und

$$\sum_{k \geq 1} \varphi(I_k) < \varepsilon \quad (2.49)$$

ist.

Anmerkung 2.4.1. Weil φ regulär ist, kann man oben jedes I_k durch ein offenes I'_k mit $\varphi(I'_k) < 2\varphi(I_k)$ ersetzen. Es ist dann $\sum_{k \geq 1} \varphi(I'_k) < 2\varepsilon$.

Beginnt man mit einem System (I_k) mit

$$\sum_{k \geq 1} \varphi(I_k) < \varepsilon/2$$

so ist $\sum_{k \geq 1} \varphi(I'_k) < \varepsilon$. Wir können also die I_k in der obigen Definition als offen annehmen.

Proposition 2.4.1. Es sei N_1, N_2, N_3, \dots ein abzählbares System von Nullmengen. Dann ist auch $N = \bigcup_{k \geq 1} N_k$ eine Nullmenge. Außerdem ist für eine Nullmenge N auch jede Teilmenge $N' \subseteq N$ eine Nullmenge.

Proposition 2.4.2. Es sei $I \in \mathfrak{S}$ auch eine Nullmenge. Dann ist $\varphi(I) = 0$.

Beweis. Es sei \bar{I} der Abschluß von I und $\bar{I} = I \cup \bigcup_{j=1}^N I_j$ eine disjunkte Zerlegung in Intervalle aus \mathfrak{S} . Die Zahl N hängt nur von n in \mathbb{R}^n ab. Es sei $\varphi(I_j) = w_j$ und $I'_j \supseteq I_j$ eine offene Menge mit $\varphi(I'_j) < w_j + \varepsilon$.

Weiter sei I''_k eine Folge von offenen Mengen mit $\sum_{k \geq 1} \varphi(I''_k) < \varepsilon$ und $\bigcup_{k \geq 1} I''_k \supseteq I$.

Dann überdecken die I''_k vereinigt mit den I'_j das kompakte Intervall \bar{I} , also genügen dafür schon endlich viele: I''_{k_j} und I'_{j_l} .

Es ist dann

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{I}) &\leq \sum_j \varphi(I''_{k_j}) + \sum_l \varphi(I'_{j_l}) \leq \varepsilon + w_1 + \varepsilon + \dots + w_N + \varepsilon = \\ &= w_1 + \dots + w_N + (N+1)\varepsilon \end{aligned}$$

Andererseits ist, nach der gewählten disjunkten Zerlegung

$$\varphi(\bar{I}) = \varphi(I) + w_1 + \dots + w_N$$

Also ist $\varphi(I) < (N+1)\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Damit ist $\varphi(I) = 0$.

2.4.3 Treppenfunktionen

Es sei $\mathcal{J} = \{I_1, \dots, I_m\}$ ein System von paarweise disjunkten Intervallen aus $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir nennen ein solches auch *PDI-System*.

Es sei $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_p\}$ ein zweites PDI-System.

Definition 2.4.3. *Es sei für jedes J_j entweder $J_j \subseteq I_{\tau(j)}$ oder $J_j \cap I_i = \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, m$. Weiter sei jedes I_i disjunkte Vereinigung von $J_{j_{i,1}}, \dots, J_{j_{i,n_i}}$. Dann heißt \mathcal{J} Verfeinerung von \mathcal{J} , abgekürzt $\mathcal{J} > \mathcal{J}$.*

Proposition 2.4.3. *Es seien \mathcal{J} und \mathcal{J} zwei PDI-Systeme. Dann gibt es ein PDI-System \mathcal{K} mit $\mathcal{K} > \mathcal{J}, \mathcal{J}$. Wir nennen \mathcal{K} die gemeinsame Verfeinerung von \mathcal{J} und \mathcal{J} .*

Definition 2.4.4. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es ein endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_m \in \mathfrak{S}$ gibt, für die*

$$f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{I_j} \tag{2.50}$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ ist. Es sei $I(f) = \{I_1, \dots, I_m\}$ das zugehörige PDI-System. Es sei $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Treppenfunktionen.

Lemma 2.4.1. *Es sei $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ und \mathcal{J} eine Verfeinerung von $I(f)$. Dann kann man f auch mit den Intervallen aus \mathcal{J} so definieren, daß $I(f) = \mathcal{J}$ ist.*

Proposition 2.4.4. *Es seien $f, g \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Dann sind auch mit $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\lambda f, f + g, fg, |f|, \sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n). \tag{2.51}$$

Beweis. Die Ausdrücke, die nur f enthalten sind offensichtlich aus f als Treppenfunktion herzuleiten, die Intervallzerlegung $I(\lambda f)$ und $I(|f|)$ ist dieselbe wie die von f .

Für die Ausdrücke mit f und g benutzt man eine gemeinsame Verfeinerung: Es sei $\mathcal{J} = I(f)$ und $\mathcal{J} = I(g)$. Wähle dann eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{K} > \mathcal{J}, \mathcal{J}$ und definiere f und g auf dieser gemeinsamen Verfeinerung. Es ist dann für ein $I \in \mathcal{K}$ eben $f + g|_I = f|_I + g|_I$, $fg|_I = f|_I \cdot g|_I$, $\sup(f, g)|_I = \sup(f|_I, g|_I)$, $\inf(f, g)|_I = \inf(f|_I, g|_I)$

Der Raum $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ ist also eine \mathbb{R} -Algebra.

Definition 2.4.5. *Es sei für $f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{I_j} \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ und ein Maß φ das Integral definiert als*

$$\int f d\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f d\varphi = \sum_{j=1}^m c_j \varphi(I_j) \tag{2.52}$$

Proposition 2.4.5. *Es gilt für $f, g \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$*

1. $f \mapsto \int f d\varphi$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$.
2. $f \leq g \Rightarrow \int f d\varphi \leq \int g d\varphi$.
3. $|\int f d\varphi| \leq \int |f| d\varphi$.

Definition 2.4.6. Es sei f eine Treppenfunktion und $I(f) = \{I_1, \dots, I_m\}$ das System der definierenden Intervalle. Dann ist

$$\text{supp } f := \bigcup_{i=1}^m I_i$$

der Support von f .

2.4.4 PDI-Mengen

Definition 2.4.7. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt PDI-Menge, wenn $M = I_1 \cup \dots \cup I_m$ eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle ist.

Proposition 2.4.6. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine PDI-Menge, wenn die charakteristische Funktion $\chi_M \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$, eine Treppenfunktion ist.

Definition 2.4.8. Es sei $M = I_1 \cup \dots \cup I_m$ eine PDI-Menge. Dann sei

$$\varphi(M) = \sum_{j=1}^m \varphi(I_j) \quad (2.53)$$

das Maß von M bezüglich φ .

Anmerkung 2.4.2. Es ist also auch $\varphi(M) = \int \chi_M d\varphi$ mit der Indikatorfunktion χ_M .

Proposition 2.4.7. Es seien M_1, M_2 zwei PDI-Mengen. Dann sind auch

$$M_1 \cap M_2, M_1 \cup M_2, M_1 - (M_1 \cap M_2)$$

PDI-Mengen.

Beweis. Es ist $\chi_{M_1 \cap M_2} = \inf(\chi_{M_1}, \chi_{M_2})$ sowie $\chi_{M_1 \cup M_2} = \sup(\chi_{M_1}, \chi_{M_2})$ und $\chi_{M_1 - (M_1 \cap M_2)} = \chi_{M_1} - \chi_{M_1 \cap M_2}$.

Proposition 2.4.8. Es seien M_1, M_2 zwei PDI-Mengen.

1. Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so ist $\varphi(M_1) + \varphi(M_2) = \varphi(M_1 \cup M_2)$.
2. Ist $M_1 \subseteq M_2$, so ist $\varphi(M_1) \leq \varphi(M_2)$.
3. Generell ist $\varphi(M_1 \cup M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2) - \varphi(M_1 \cap M_2)$

Beweis. Es gilt in 1., daß $\chi_{M_1 \cup M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$. In 2. gilt $\chi_{M_1} \leq \chi_{M_2}$. In 3. ist $\chi_{M_1 \cup M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2} - \chi_{M_1 \cap M_2}$.

Die Aussagen folgen durch Bilden der Integrale.

Lemma 2.4.2. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine PDI-Menge mit*

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^m M_i$$

und PDI-Mengen M_i . Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $f \geq 0$. Dann ist

$$\int_M f \, d\varphi \leq \sum_{i=1}^m \int_{M_i} f \, d\varphi.$$

insbesondere auch

$$\varphi(M) \leq \sum_{i=1}^m \varphi(M_i)$$

Beweis. Es ist $\chi_M \leq \sum_{i=1}^m \chi_{M_i}$. Integration mit $\int_{\mathbb{R}^n}$ ergibt die zweite Behauptung, Multiplikation mit f und Integration die erste.

Definition 2.4.9. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge zu der es ein System von Intervallen I_i gibt, mit*

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i) < A$$

Dann heie M eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(M) < A$.

Anmerkung 2.4.3. Wenn keine Zweideutigkeit möglich ist, schreiben wir auch $\varphi(M) < A$ ohne anzunehmen, daß $\varphi(M)$ wie bei einer PDI-Menge M definiert ist.

Lemma 2.4.3. *Es sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ eine zunehmende Folge von PDI-Mengen mit*

$$M = \bigcup_{k \geq 1} M_k.$$

Dann existiert eine abzählbare Menge von paarweise disjunkten Intervallen $I_l \in \mathfrak{S}$ mit $\bigcup_{l \geq 1} I_l = M$.

Ist $\varphi(M_k) \leq A$, so ist auch

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varphi(I_l) \leq A.$$

Also ist M eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(M) \leq A$.

Beweis. Jedes $M_{k+1} - M_k$ ist disjunkte Vereinigung eines endlichen Systems von Intervallen $\mathcal{J}_{k+1,k}$. Die Vereinigung aller $\mathcal{J}_{k+1,k}$ mit den Intervallen, die zu M_1 gehören ist die gesuchte Darstellung von M als Vereinigung abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle.

Für die Intervalle gilt $I_1 \cup \dots \cup I_l \subseteq M_k$ mit $k = k(l)$ für jedes $l \geq 1$.

Also ist $\sum_{i=1}^l \varphi(I_i) \leq \varphi(M_k) \leq A$ für jedes $l \geq 1$ und damit auch $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i) \leq A$.

Lemma 2.4.4. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(M) < A$. Weiter sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine φ -Nullmenge.*

Dann ist auch $M \cup N$ abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(M \cup N) < A + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Es sei $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ mit $\sum_i \varphi(I_i) < A$. Weiter sei $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$ mit $\sum_j \varphi(J_j) < \varepsilon$.

Bilde eine Folge K_k von Intervallen, die aus allen I_i und allen J_j besteht. Weiter sei $U_l = \bigcup_{k=1}^l K_k$. Dann ist U_l eine PDI-Menge und die PDI-Menge $U_{l+1} - U_l$ ist Teil entweder eines Intervalls I_i oder eines Intervalls J_j .

Bilde nun nach Lemma 2.4.3 zu $U_l \subseteq U_{l+1}$ die Vereinigung aus allen paarweise disjunkten Intervallen K'_p , mit

$$\bigcup_p K'_p = \bigcup_l U_l = \bigcup_k K_k \supseteq M \cup N$$

Da entweder $K'_p \subseteq I_{\tau(p)}$ oder $K'_p \subseteq J_{\tau'(p)}$ ist

$$K'_1 \cup \dots \cup K'_k \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_1 \cup \dots \cup J_{m'}$$

für m, m' abhängig von k .

Damit ist

$$\sum_{k=1}^l \varphi(K'_k) < \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(J_j) < A + \varepsilon$$

Also ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(K'_k) < A + \varepsilon$ und damit $M \cup N$ abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(M \cup N) < A + \varepsilon$.

Lemma 2.4.5. *Es sei M eine PDI-Menge, die gleichzeitig abzählbar beschränkt ist mit $\varphi_s(M) < A$ als Schranke. Dann ist auch $\varphi(M) < A$.*

Beweis. Es sei I_i die Folge der Intervalle mit $\sum_i \varphi(I_i) < A$ und $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Es sei $M = J_1 \cup \dots \cup J_s$ die Zerlegung in disjunkte Intervalle. Dann ist J_j abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(J_j) < a_j = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i \cap J_j)$ und den Intervallen $J_j \cap I_i$ als Überdeckung. Da $\bigcup_{j=1}^s (J_j \cap I_i) \subseteq I_i$ mit disjunkter Vereinigung links, folgt auch $a_1 + \dots + a_s < A$. Es bleibt also $\varphi(J_j) \leq \varphi_s(J_j)$ zu zeigen.

Wir haben also die ursprüngliche Aussage, jetzt mit $M = J$, einem Intervall. Dort gilt sie aus folgendem Lemma.

Lemma 2.4.6. *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall aus \mathfrak{S} . Weiter sei $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ eine Überdeckung mit Intervallen $I_i \subseteq J$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i) < A$. Dann ist $\varphi(J) < A$.*

Beweis. Ersetze I_i durch $I'_i \supseteq I_i$ offen mit $\varphi(I'_i) < \varphi(I_i) + \eta/2^i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I'_i) < A + \eta$ für jedes $\eta > 0$. Es sei \bar{J} der Abschluß von J in \mathbb{R}^n und $K_1 \cup \dots \cup K_r$ die Zerlegung von $\bar{J} - J$ in disjunkte Intervalle. Ersetze wieder K_j durch $K'_j \supseteq K_j$ mit $\varphi(K'_j) < \varphi(K_j) + \eta$. Die Zahl r ist kleiner als $N(n)$ nur abhängig von n in \mathbb{R}^n . Die I'_i und K'_j überdecken \bar{J} . Es genügen endlich viele $I'_{i_1}, \dots, I'_{i_m}$ und alle K'_j . Es ist dann

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{J}) &= \varphi(J) + \sum_{j=1}^r \varphi(K_j) \leq \sum_{\nu=1}^m \varphi(I'_{i_\nu}) + \sum_{j=1}^r \varphi(K'_j) < \\ &A + \eta + \sum_{j=1}^r (\varphi(K_j) + \eta) < A + (N + 1)\eta + \sum_{j=1}^r \varphi(K_j) \end{aligned}$$

also

$$\varphi(J) < A + (N + 1)\eta$$

also

$$\varphi(J) \leq A$$

Beginnt man mit einem $A' = A - \varepsilon$, folgt die Aussage des Lemmas.

Lemma 2.4.7. *Es sei M_i ein System von PDI-Mengen im \mathbb{R}^n mit $\varphi(M_i) < A$. Weiter sei für eine φ -Nullmenge N immer $M_i \cup N \subseteq M_{i+1} \cup N$.*

Dann ist $M = \bigcup_i M_i \cup N$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(M) < A + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Es ist $M_1 \cup \dots \cup M_k \subseteq M_{k+1} \cup N$. Also ist die PDI-Menge $M'_k = M_1 \cup \dots \cup M_k$ abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(M'_k) < A + \varepsilon$. Es gilt also nach vorigem Lemma auch für $\varphi(M'_k)$ als Maß der PDI-Menge M'_k , daß $\varphi(M'_k) < A + \varepsilon$ ist. Außerdem ist $M'_k \subseteq M'_{k+1}$ und damit ist nach Lemma 2.4.3 auch

$$M' = \bigcup_{k=1}^{\infty} M'_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(M') < A + \varepsilon$. Nach Lemma 2.4.4 ist dann auch $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \cup N = M' \cup N$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(M) < A + 2\varepsilon$, indem man N auch mit ε beschränkt.

2.4.5 Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge

Proposition 2.4.9. *Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine φ -monoton wachsende ($f_k \leq f_{k+1}$) Folge von Treppenfunktionen $f_k \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge:*

$$\int f_k \, d\varphi < A \tag{2.54}$$

Dann konvergiert (f_k) φ -punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Ersetze zunächst f_k durch $f_k - f_1$, um $f_k \geq 0$ für alle k annehmen zu können. Ist dann f die neue Grenzfunktion, so ist $f + f_1$ die ursprüngliche. Da mit $A' = \int f_1$ immer $A' \leq \int f_k < A$ für alle $k \geq 1$ gilt, ist auch $|\int f_k| < A''$ mit $A'' > |A|, |A'|$. Also hat mit

$$\int (f_k - f_1) = \int f_k - \int f_1 < |\int f_k - \int f_1| < |\int f_k| + |\int f_1| < 2A''$$

auch die neue Folge eine beschränkte Integralfolge.

Betrachte nun $W_{k,m} = f_k^{-1}([2^m A, \infty])$. Es ist $W_{k,m}$ eine PDI-Menge mit

$$\varphi(W_{k,m}) < 1/2^m.$$

(Dies ist ein Spezialfall des weiter unten betrachteten „Vergleichslemmas“).

Ist N die Nullmenge außerhalb derer stets $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$ und $f_i(x) \geq 0$ gilt, so ist $W_{k,m} \cup N \subseteq W_{k+1,m} \cup N$.

Man setze

$$W_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_{k,m}.$$

Es ist dann nach Lemma 2.4.7 auch $\varphi_s(W_m \cup N) < 1/2^m + \varepsilon$. A fortiori ist auch $\varphi_s(W_m) < 1/2^m + \varepsilon$.

Es sei $W = \bigcap_{m \geq 1} W_m \subseteq W_m$. Da W_m abzählbar beschränkt, mit $\varphi_s(W_m) < 1/2^m + \varepsilon$ ist W auch eine Nullmenge.

Die Menge W' der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ in denen $f_k(x)$ nicht gegen ein $f(x)$ konvergiert besteht aus den x , für die $f_k(x) \rightarrow \infty$ oder $x \in N$ ist. Ist $W' \ni x \notin N$, so ist $f_k(x) > 2^m A$ für jedes m und alle $k \geq k_0(m)$, also $x \in W_m$ für jedes m , also $x \in W$. Es ist also $W' \subseteq W \cup N$, eine Nullmenge außerhalb derer $f_k(x)$ gegen ein $f(x) \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Anmerkung 2.4.4. Wir nennen eine φ -monoton wachsende Folge (f_k) aus $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge eine *BM-Folge in $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$* .

Lemma 2.4.8. *Es seien (f_k) und g_k zwei BM-Folgen in $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $(\sup(f_k, g_k))_k$ eine BM-Folge in $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Zunächst ist außerhalb einer Nullmenge N immer $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ und $g_{k+1}(x) \geq g_k(x)$. Es ist dann $\sup(f_{k+1}, g_{k+1}) \geq \sup(f_k, g_k)$. Es sei nämlich oBdA $f_k(x) \geq g_k(x)$, so ist $f_{k+1}(x) \geq f_k(x), g_k(x)$ und umso mehr $\sup(f_{k+1}(x), g_{k+1}(x)) \geq f_{k+1}(x) \geq f_k(x), g_k(x)$.

Um die Beschränktheit der Integralfolge zu zeigen setzt man $f'_k = f_k - f_0$ und $g'_k = g_k - g_0$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \sup(f_k, g_k) &= \sup(f'_k + f_0, g'_k + g_0) \leq \\ &\leq \sup(f'_k, g'_k) + \sup(f_0, g_0) \leq f'_k + g'_k + \sup(f_0, g_0) \end{aligned}$$

Da f'_k und g'_k eine beschränkte Integralfolge haben, die Schranken seien A_1 und A_2 , ist auch die Integralfolge von $f'_k + g'_k$ beschränkt durch $A_1 + A_2$. Also ist auch $\int \sup(f_k, g_k) d\varphi < A_1 + A_2 + \int \sup(f_0, g_0) d\varphi$.

Definition 2.4.10. Es sei $\mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für die es eine φ -monoton wachsende Folge (f_k) von Treppenfunktionen $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge gibt, so daß $f_k \nearrow f$ φ -punktweise.

Proposition 2.4.10. Es sei $f \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und $f_k \rightarrow f$ sowie $f'_k \rightarrow f$ zwei φ -monoton wachsende Folgen aus $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge, wie sie in der Definition von \mathfrak{C}_1 beschrieben sind.

Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f'_k d\varphi =: I(f) \tag{2.55}$$

Wir nennen $\int f d\varphi := I(f)$ das Integral von f bezüglich φ .

Beweis. Wir setzen $g_k := \sup(f_k, f'_k)$ und ersetzen f_k, f'_k durch f_k, g_k mit $f_k \leq g_k$. Weiter sei $g_k := g_k - f_1$ und $f_k := f_k - f_1$. Wir können also auch $g_k, f_k \geq_\varphi 0$ annehmen.

Zu zeigen mit $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\varphi$ und $B = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k d\varphi$, daß $A = B$ ist. Die Beziehung $A \leq B$ ist von vornherein klar und die Folgen $\int f_k d\varphi$ sowie $\int g_k d\varphi$ sind monoton wachsend.

Wähle k mit $\int g_l d\varphi \geq B - \varepsilon$ für alle $l \geq k$ und $\int f_l d\varphi \geq A - \varepsilon$ für alle $l \geq k$

Dann ist

$$B - A \leq 2\varepsilon + \int (g_k - f_k) d\varphi$$

Weiterhin ist mit $l \geq k$

$$\int (g_k - f_k) = \int (g_k - f_l) d\varphi + \int (f_l - f_k) d\varphi \geq 0 \tag{2.56}$$

Da $A \geq \int f_l d\varphi \geq \int f_k d\varphi \geq A - \varepsilon$ ist

$$\int (f_l - f_k) d\varphi \leq \varepsilon.$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\int (g_k - f_l) d\varphi$ kleiner als jedes positive $\varepsilon' > 0$ wird. Auch negative Werte sind a priori erlaubt, allerdings kann, da (2.56) immer ≥ 0 ist, ein Wert $< -\varepsilon$ gar nicht auftreten.

Nenne nun $U = \text{supp } g_k$ mit $D = \varphi(U)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int (g_k - f_l) &= \int_U (g_k - f_l) + \int_{\mathbb{R}^n - U} (g_k - f_l) = \\ &= \int_U (g_k - f_l) + \int_{\mathbb{R}^n - U} (-f_l) \leq \int_U (g_k - f_l) \end{aligned} \tag{2.57}$$

da $f_l \geq 0$ nach der anfänglichen Annahme. Wir brauchen also nur $\int_U (g_k - f_l)$ genügend klein zu machen.

Es sei nun

$$V_l = \{x \in U \mid f_l(x) \geq g_k(x) - \varepsilon'\} \subseteq U$$

und $V'_l = V_l \cup V_{l-1} \cup \dots \cup V_1$. Die Folge $\dots \supseteq V'_{l+1} \supseteq V'_l \supseteq \dots$ ist eine monotone Folge von PDI-Mengen, da alle V_l auch PDI-Mengen sind.

Es sei J_j die zugehörige abzählbare Folge disjunkter Intervalle mit $\bigcup_j J_j = \bigcup_l V'_l = \bigcup_l V_l$. Jedes J_j ist Teilmenge von $V_{l(j)}$ für ein geeignetes $l(j) \geq 1$.

Weiter sei N' die Nullmenge, außerhalb derer sowohl immer $f_{k+1} \geq f_k$ und $g_{k+1} \geq g_k$ gilt, sowie die Grenzwerte $\lim_k f_k(x) = \lim_k g_k(x) = f(x)$ existieren und einander gleich sind. Es sei $N = N' \cap U$. Für später führen wir noch für alle $j > i \geq 1$ die Mengen

$$N_{j,i} = \{x \in U \mid f_j(x) < f_i(x)\}$$

und

$$N_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} N_{i+1,i}$$

Es sind Nullmengen und PDI-Mengen, die also aus Intervallen I mit $\varphi(I) = 0$ bestehen.

Mit I_i sei eine Folge von Intervallen $I_i \subseteq U$ bezeichnet, für die

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(I_i) < \varepsilon'$$

und

$$N \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

ist.

Für jedes $x \in U - N$ ist $\lim_k f_k(x) = \lim_k g_k(x) = f(x)$, also liegt x in einem $V_l \subseteq V'_l$ für genügend großes l . Damit ist $\bigcup_l V_l \supseteq U - N$. Es ist damit $\bigcup_i I_i \cup \bigcup_j J_j = U$.

Es sei nun $K'_l \subseteq U$ eine abzählbare Folge von Intervallen, die aus allen J_j und I_i besteht. Es sei $W_l = \bigcup_{s=1}^l K'_s$ und K_l die zu dieser zunehmenden Menge W_l von PDI-Mengen gehörige disjunkte Folge von Intervallen mit $U = \bigcup_l W_l = \bigcup_l K_l$. Jedes K_l ist entweder Teil eines I_i oder eines J_j

Wähle nun endlich viele K_1, \dots, K_m mit

$$\sum_{k=1}^m \varphi(K_k) \geq \varphi(U) - \varepsilon' = D - \varepsilon'$$

und $K := \bigcup_{k=1}^m K_k$.

Eine solche Auswahl muß es immer geben, da die PDI-Menge $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ ist. Wäre $S = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(K_k) < \varphi(U)$ so wäre nach Lemma 2.4.5 auch $\varphi(U) \leq S$, Widerspruch.

Es seien die K_1, \dots, K_m aufgeteilt in

$$K'_1, \dots, K'_{m'}$$

mit $K'_k \subseteq J_{s(k)}$ und

$$K''_1, \dots, K''_{m''}$$

mit $K''_k \subseteq I_{r(k)}$ mit geeigneten r, s abhängig von k .

Es sei $J_{s(k)} \subseteq V_{l(s(k))}$ und $K' = \bigcup_{k=1}^{m'} K'_k$ sowie $K'' = \bigcup_{k=1}^{m''} K''_k$.

Wähle $l_0 > l(s(k))$ für alle $k = 1, \dots, m'$. Teile nun jedes K'_k in die PDI-Mengen

$$K_k^{(1)} = K'_k \cap (U - N_{l_0})$$

und

$$K_k^{(2)} = K'_k \cap N_{l_0}.$$

Die $K_k^{(2)}$ sind Nullmengen aus Intervallen I mit $\varphi(I) = 0$.

Es sei $K^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{m'} K_k^{(1)}$ und $K^{(2)} = \bigcup_{k=1}^{m'} K_k^{(2)}$

$$\begin{aligned} \int_U (g_k - f_{l_0}) &= \int_{K^{(1)}} (g_k - f_{l_0}) + \int_{K^{(2)}} (g_k - f_{l_0}) + \int_{K''} (g_k - f_{l_0}) + \int_{U-K} (g_k - f_{l_0}) \\ &\leq \varphi(K')\varepsilon' + \varphi(K'') \sup_U (g_k) + \varphi(U-K) \sup_U (g_k) \\ &\leq D\varepsilon' + \varepsilon' \sup_U (g_k) + \varepsilon' \sup_U (g_k) \end{aligned} \quad (2.58)$$

denn es ist

$$\int_{K^{(1)}} (g_k - f_{l_0}) \leq \varphi(K')\varepsilon' \quad (2.59)$$

da $g_k - f_{l_0} \leq \varepsilon'$ für jedes $K_k^{(1)} \subseteq J_{s(k)}$ denn $K_k^{(1)} \subseteq K'_k \subseteq J_{s(k)}$ und $J_{s(k)}$ ist in einem $V_{l(s(k))}$ mit $l = l(s(k)) < l_0$ also $f_l(x) \geq g_k(x) - \varepsilon'$ und da $x \notin N_{l_0}$ ist $f_{l_0}(x) \geq f_{l_0-1}(x) \geq \dots \geq f_l(x) \geq g_k(x) - \varepsilon'$.

Weiter ist

$$\int_{K^{(2)}} (g_k - f_{l_0}) = 0 \quad (2.60)$$

da $K^{(2)}$ nur aus endlich vielen Intervallen I mit $\varphi(I) = 0$ besteht.

Weiter ist

$$\int_{K''} g_k - f_{l_0} \leq \sup_U (g_k) \varphi(K'') \leq \sup_U (g_k) \varepsilon' \quad (2.61)$$

da $g_k - f_{l_0} \leq \sup_U (g_k)$ und $\varphi(K'') \leq \sum_i \varphi(I_i) < \varepsilon'$.

Schließlich ist

$$\int_{U-K} g_k - f_{l_0} \leq \sup_U (g_k) \varphi(U-K) \leq \sup_U (g_k) \varepsilon' \quad (2.62)$$

da $g_k - f_{l_0} \leq \sup_U (g_k)$ und $\varphi(U-K) \leq \varepsilon'$, denn es war ja $\varphi(K) \geq \varphi(U) - \varepsilon'$.

Damit kann $\int (g_k - f_{l_0})$ durch Wahl von ε' beliebig klein gemacht werden und für $l > l_0$ ist dann erst recht

$$\int g_k - f_l = \int (g_k - f_{l_0}) - \int (f_l - f_{l_0}) \leq \int (g_k - f_{l_0})$$

da $\int f_l - \int f_{l_0} \geq 0$.

Proposition 2.4.11. *Mit $f, g \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und $\lambda > 0$ sind auch $\lambda f, f + g \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und es ist*

$$\int \lambda f \, d\varphi = \lambda \int f \, d\varphi \quad (2.63)$$

$$\int (f + g) \, d\varphi = \int f \, d\varphi + \int g \, d\varphi \quad (2.64)$$

Proposition 2.4.12. *Es seien $g, h \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $g \geq h$. Dann ist auch*

$$\int g \, d\varphi \geq \int h \, d\varphi$$

Beweis. Es sei $u_i \nearrow g$ und $v_i \nearrow h$ sowie $w_i = \sup(u_i, v_i) \nearrow g$, drei BM-Folgen mit $u_i, v_i, w_i \in \mathfrak{C}_0$.

Dann ist, wegen $w_i \geq v_i \Rightarrow \int w_i \geq \int v_i$ für Treppenfunktionen w_i, v_i :

$$\int g = \lim_{i \rightarrow \infty} \int w_i \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \int v_i = \int h$$

Definition 2.4.11. Nenne $\mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ die Menge der $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die sich als $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ schreiben lassen. Sie heißen summierbare Funktionen (bezüglich φ).

Proposition 2.4.13. Der Raum $\mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ ist der von $\mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ in $F(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ erzeugte Unterraum. Sind $f, g \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$, so ist auch

$$f^+, f^-, |f|, \sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi) \quad (2.65)$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $f^+ \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$. Es sei $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und es seien $f_{1k}, f_{2k} \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ die zugehörigen Folgen. Dann sind $g_{1k} = \sup(f_{1k}, f_{2k})$ und $g_{2k} = f_{2k}$ zwei BM-Folgen aus $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Nennt man g_1, g_2 die zugehörigen Funktionen $g_{1k} \rightarrow g_1$ und $g_{2k} \rightarrow g_2$, so ist $f^+ = g_1 - g_2$.

Proposition 2.4.14. Es sei $f \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $f = f_1 - f_2 = f_3 - f_4$ und $f_i \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$. Dann ist

$$\int f_1 d\varphi - \int f_2 d\varphi = \int f_3 d\varphi - \int f_4 d\varphi =: I(f) \quad (2.66)$$

Wir nennen $\int f d\varphi := I(f)$ das Lebesgue-Integral von f bezüglich φ .

Für die Abbildung

$$\int : \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \int f d\varphi \quad (2.67)$$

gilt

Proposition 2.4.15. Es gilt für $f, g \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$

1. $f \mapsto \int f d\varphi$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$.
2. $f \leq g \Rightarrow \int f d\varphi \leq \int g d\varphi$.
3. $|\int f d\varphi| \leq \int |f| d\varphi$.

Beweis. 2. Es sei $f \in \mathfrak{C}_2$ und $f \geq 0$. Wir zeigen $\int f d\varphi \geq 0$. Es ist $f = g - h \geq 0$ mit $g, h \in \mathfrak{C}_1$. Aus $g \geq h$ folgt nach obiger Proposition $\int g d\varphi \geq \int h d\varphi$, also $\int f d\varphi = \int (g - h) d\varphi = \int g d\varphi - \int h d\varphi \geq 0$.

3. Es ist mit $f = f^+ - f^-$ und $f^+, f^- \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\int f| &= |\int (f^+ - f^-)| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \\ &\leq \left| \int f^+ \right| + \left| \int f^- \right| = \int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f| \quad (2.68) \end{aligned}$$

Es folgen einige nützliche Lemmata:

Lemma 2.4.9. *Es seien $f_i \leq g_i$ BM-Folgen von Treppenfunktionen mit $f_i \nearrow f$ und $g_i \nearrow g$ für $f, g \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$.*

Dann ist $f \leq g$ und damit auch $\int f d\varphi \leq \int g d\varphi$.

Lemma 2.4.10. *Es sei $f \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und $u \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $f + u \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$.*

Beweis. Es sei $f_i \nearrow f$ mit $f_i \in \mathfrak{C}_0$ und mit beschränkter Integralfolge. Dann ist $f_i + u \nearrow f + u$, auch mit beschränkter Integralfolge.

Lemma 2.4.11. *Es sei $f \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$. Dann existiert eine monoton fallende Folge $u_i \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $u_i \searrow f$ und*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int u_i d\varphi = \int f d\varphi \tag{2.69}$$

Beweis. Es ist $f = f_1 - f_2$ mit $f_i \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$. Dann existiert eine Folge von Treppenfunktionen $v_i \nearrow f_2$ mit beschränkter Integralfolge und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int v_i d\varphi = \int f_2 d\varphi.$$

Es ist $u_i = f_1 - v_i$.

Lemma 2.4.12 (Vergleichslemma). *Es sei $f \geq 0$ eine Funktion aus $\mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $\int f d\varphi = A \geq 0$. Weiter sei mit $\delta > 0$*

$$U = U(f, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \delta\}$$

Dann ist U eine abzählbar beschränkte Menge mit

$$\varphi_s(U) \leq A/\delta + \eta$$

für jedes $\eta > 0$.

Beweis. Es sei zunächst $f \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}^n)$ eine Treppenfunktion. Dann ist $U = U(f, \delta)$ eine PDI-Menge, für die offensichtlich $\varphi(U) \leq A/\delta$ gilt.

Als nächstes sei $f \in \mathfrak{C}_1(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und $u_i \nearrow f$ eine zugehörige BM-Folge von Treppenfunktionen. Wir können, indem wir u_i durch $\sup(u_i, 0)$ ersetzen, immer $u_i \geq 0$ annehmen.

Es ist $U(f, \delta) \subseteq \bigcup_i U(u_i, \delta') \cup N$ für jedes $\delta' < \delta$ mit einer Nullmenge N außerhalb derer $u_i(x) \leq u_{i+1}(x)$ für alle i gilt. Es ist $U_i = U(u_i, \delta')$ eine PDI-Menge mit $\varphi(U_i) \leq A_i/\delta' \leq A/\delta'$, wobei $A_i = \int u_i d\varphi$ sei. Weiter ist $U(u_i, \delta') \cup N \subseteq U(u_{i+1}, \delta') \cup N$ für alle i .

Also ist nach Lemma 2.4.7 auch $\bigcup_i U_i \cup N = U' \cup N$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U' \cup N) \leq A/\delta' + \gamma$ mit beliebig kleinem $\gamma > 0$. Wählt man nun δ' genügend nahe an δ , so daß $A/\delta' + \gamma - A/\delta < \eta$, so ist $U' \cup N$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U' \cup N) < A/\delta + \eta$. Also ist auch $U(f, \delta) \subseteq U' \cup N$ eine solche.

Schließlich sei $f \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ und $u_i \searrow f$ eine Folge von Funktionen aus \mathfrak{C}_1 gemäß Lemma 2.4.11. Dann ist $U(f, \delta) \subseteq (U_i = U(u_i, \delta)) \cup N$ mit einer Nullmenge

N . Es ist dann U_i eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U_i) \leq A_i/\delta + \eta' = S_i$ für jedes $\eta' > 0$ und für $A_i = \int u_i d\varphi$. Da $A_i \searrow A$ kann man ein i und ein $\eta' > 0$ wählen mit $A_i/\delta + \eta' - A/\delta \leq \eta/2$, also

$$S_i = A_i/\delta + \eta' \leq A/\delta + \eta/2$$

Also ist $U_i \cup N$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U_i \cup N) \leq A/\delta + \eta$, indem man N mit $\eta/2$ beschränkt.

Damit ist auch für $f \in \mathfrak{C}_2$ der Beweis erbracht.

Lemma 2.4.13. *Es sei $f \in \mathfrak{C}_2(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $f \geq 0$. Ist dann $\int f d\varphi = 0$, so ist $f =_\varphi 0$.*

Beweis. Es ist mit der obigen Bezeichnung $U_k = U(f, 1/k)$ abzählbar beschränkt mit $\varphi_s(U_k) < \eta$ für jedes $\eta > 0$. Also ist U_k eine Nullmenge. Damit ist auch $U = \bigcup_k U_k$ eine Nullmenge. Aber U ist auch die Menge aller x mit $f(x) > 0$. Also ist $f(x) = 0$ außerhalb der Nullmenge U .

2.4.6 Der Satz von Beppo Levi

Im folgenden stehe \mathfrak{C}_i für $\mathfrak{C}_i(\mathbb{R}^n, \varphi)$ mit $i = 1, 2$.

Lemma 2.4.14. *Es sei $f_i \in \mathfrak{C}_1$ eine Folge von \mathfrak{C}_1 -Funktionen mit $f_i \leq f_{i+1}$ und $\int f_i d\varphi \leq A$.*

Dann existiert eine Funktion $f \in \mathfrak{C}_1$ mit $f_i \nearrow f$ und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\varphi = \int f d\varphi.$$

Beweis. Es seien $u_{ik} \nearrow f_i$ die aufgrund der Definition von $f_i \in \mathfrak{C}_1$ existierenden monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge. OBdA sei $\int (f_i - u_{ik}) < 1/2^k$.

Setze

$$v_k = \sup(u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{kk}).$$

Dann ist $v_{k+1} \geq v_k$ und es ist $v_k \leq f_k$, also $\int v_k \leq \int f_k \leq A$.

Es existiert also ein $f \in \mathfrak{C}_1$ mit $v_k \nearrow f$.

Gebe nun ein $\delta > 0$ vor. Wählt man $k = k(\delta, \varepsilon)$ mit $\int (f - v_k) < \varepsilon\delta$ und $\int (f_k - u_{kk}) < 1/2^k < \varepsilon\delta$, so ist für alle $l \geq k$ auch

$$\int (f - v_l) < \int (f - v_k) < \varepsilon\delta$$

und

$$\int (f_l - u_{ll}) < 1/2^l < 1/2^k < \varepsilon\delta$$

also (beachte $|v_l - f_l| = f_l - v_l$ wegen $v_l \leq f_l$, sowie $u_{ll} \leq v_l$):

$$\int |f - f_l| \leq \int |f - v_l| + \int |v_l - f_l| \leq \int (f - v_l) + \int (f_l - u_{ll}) < 2\varepsilon\delta \quad (2.70)$$

Nach dem Vergleichslemma ist dann $U_l(\delta) = U(|f - f_l|, \delta)$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U_l(\delta)) < 3\varepsilon$ für alle $l \geq k(\delta, \varepsilon)$.

Die Menge $N(\delta)$ aller x mit $|f(x) - f_l(x)| \geq \delta$ für alle $l > 1/\delta$ liegt also in jedem $U_l(\delta)$ für $l > 1/\delta$. Also ist $N(\delta)$ eine Nullmenge.

Die Nullmenge $N = \bigcup_{p \geq 1} N(1/p)$ besteht aus allen $x \in \mathbb{R}^n$ für die ein $p \geq 1$ existiert mit $|f(x) - f_k(x)| \geq 1/p$ für alle $k > p$. Ihr Komplement U besteht aus den $x \in \mathbb{R}^n$, so daß für jedes $p \geq 1$ ein $k > p$ existiert mit $|f(x) - f_k(x)| < 1/p$. Die Folge $f_k(x)$ hat also eine Teilfolge die sich in $f(x)$ häuft und da $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ für alle k und alle x außerhalb einer Nullmenge N' , ist für $x \notin N' \cup N$ immer $f_k(x) \leq f(x)$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$.

Da also außerhalb einer Nullmenge immer $f_k(x) \leq f(x)$ ist, folgt aus (2.70):

$$\int f - \int f_k = \int (f - f_k) = \int |f - f_k| < \varepsilon$$

für $k > k(\varepsilon)$.

Also ist auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \int f$$

und damit alles gezeigt.

Theorem 2.4.1 (Beppo Levi). *Es sei $f_i \in \mathfrak{C}_2$ eine Folge von \mathfrak{C}_2 -Funktionen mit $f_i \leq f_{i+1}$ und $\int f_i d\varphi \leq A$.*

Dann existiert eine Funktion $f \in \mathfrak{C}_2$ mit $f_i \nearrow f$ und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\varphi = \int f d\varphi.$$

Beweis. Indem man f_i durch $f_i - f_1$ ersetzt, kann man $f_i \geq 0$ annehmen. Außerdem sei $A = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i$ gesetzt.

Es seien nun

$$\begin{aligned} u_{1k} &\searrow f_1, \\ u_{2k} &\searrow f_2 - f_1, \\ u_{3k} &\searrow f_3 - f_2, \\ &\dots \\ u_{ik} &\searrow f_i - f_{i-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

monoton fallende Folgen von $u_{ik} \in \mathfrak{C}_1$ mit

$$\begin{aligned} \int (u_{1k} - f_1) &< 1/2^{k+1}, \\ \int (u_{ik} - (f_i - f_{i-1})) &< 1/2^{i+k}. \end{aligned}$$

Weiter sei $u_k^s = u_{1k} + u_{2k} + \dots + u_{sk} \in \mathfrak{C}_1$. Wegen $u_{i,k+1} \leq u_{ik}$ ist auch $u_{k+1}^s \leq u_k^s$ und wegen $u_{ik} \geq 0$ auch $u_k^s \leq u_k^{s+1}$.

Es gilt

$$\int u_k^s - \int f_s = \int ((u_{1k} - f_1) + (u_{2k} - (f_2 - f_1)) + \cdots + (u_{sk} - (f_s - f_{s-1}))) < \\ 1/2^{k+1} + 1/2^{k+2} + \cdots + 1/2^{s+k} < 1/2^k$$

Also

$$\int u_k^s < \int f_s + 1/2^k \leq A + 1/2^k.$$

Damit sind die $\int u_k^s$ nach oben beschränkt und es gibt nach vorigem Lemma $u_k \in \mathfrak{C}_1$ mit $u_k^s \nearrow_s u_k$. Für das Integral gilt dann

$$\int u_k = \lim_{s \rightarrow \infty} \int u_k^s \leq A + 1/2^k$$

Außerdem ist wegn $u_k \geq u_k^s \geq f_s$ auch

$$\int u_k \geq \int f_s > A - \eta$$

für jedes $\eta > 0$, indem man s genügend groß wählt.

Da $u_{k+1}^s \leq u_k^s$ ist auch $0 \leq u_{k+1} \leq u_k$. Die $u_1 - u_k \in \mathfrak{C}_1$ bilden also eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus \mathfrak{C}_1 . Für die Integrale gilt

$$\int (u_1 - u_k) \leq \int |u_1 - u_k| \leq \int u_k + u_1 \leq 2A + 1/2 + 1/2^k$$

Die Integralfolge der $\int (u_1 - u_k)$ ist also beschränkt. Es gibt daher nach vorigem Lemma ein $v \in \mathfrak{C}_1$ mit $u_1 - u_k \nearrow_k v$. Es sei dann $u = u_1 - v \in \mathfrak{C}_2$. Wir werden zeigen, daß u das im Satz genannte f ist.

Die Folge $u_k \searrow_k u$ ist eine Folge von Funktionen aus \mathfrak{C}_1 , die von oben her im Sinne von Lemma 2.4.11 gegen u konvergiert, und für die $\lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \int u$ gilt.

Es ist

$$\int u = \int (u - u_k) + \int u_k$$

Da $0 \leq \int (u_k - u) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gemacht werden kann, indem man $k > k(\varepsilon)$ wählt und außerdem für jedes $\eta > 0$ auch $A - \eta < \int u_k \leq A + 1/2^k$ nach obigen Überlegungen gilt, ergibt sich

$$\int u = A = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i$$

Aus $u_k \geq u_k^s \geq f_s$ und $u_k \searrow u$ folgt außerdem $u \geq f_s$ für alle $s \geq 1$.

Mit Hilfe des Vergleichslemmas zeigen wir jetzt, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = u(x)$ für alle x außerhalb einer Nullmenge:

Für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ ist für alle $s > s(\varepsilon, \delta)$

$$\int (u - f_s) < \varepsilon \delta$$

Für diese ist also nach dem Vergleichslemma $U(u - f_s, \delta)$ eine abzählbar beschränkte Menge mit $\varphi_s(U(u - f_s, \delta)) < 2\varepsilon$.

Die Menge $U(\delta) = \bigcap_{s=1}^{\infty} U(u - f_s, \delta) \subseteq U(u - f_s, \delta)$ ist also eine Nullmenge. Sie besteht aus allen $x \in \mathbb{R}^n$, für die $f_s(x) \leq u(x) - \delta$ für alle $s \geq 1$ ist.

Bilde nun $U = \bigcup_{p=1}^{\infty} U(1/p)$, eine Nullmenge. Sie besteht aus allen $x \in \mathbb{R}^n$, für die es ein $p \geq 1$ gibt, so daß $f_s(x) \leq u(x) - 1/p$ für alle $s \geq 1$ ist. Also enthält U genau die $x \in \mathbb{R}^n$, für die nicht $f_s(x) \nearrow u(x)$ gilt. (Wie üblich muß man eigentlich U noch um die Nullmenge N aller x erweitern, für die $f_i(x)$ nicht monoton wächst oder die anderen benutzten Ungleichungen zwischen Funktionen der Form $f \leq_{\varphi} g$ nicht für $f(x) \leq g(x)$ gelten. Dies sind aber nur abzählbar viele, es bleibt also bei einer Nullmenge.)

2.4.7 Der Satz von Lebesgue

Theorem 2.4.2 (Lebesgue). *Es sei $f_i \in \mathfrak{C}_2$ eine Folge von Funktionen, für die es eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$$

punktweise fast überall. Weiter sei $|f_i| \leq h$ mit einer Funktion $h \in \mathfrak{C}_2$.

Dann ist auch $f \in \mathfrak{C}_2$ und man hat

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\varphi = \int f d\varphi \tag{2.71}$$

Beweis. Da $|f_i| \leq h$ ist auch $0 \leq f_i^+, f_i^- \leq |f_i| = f_i^+ + f_i^- \leq h$. Weiterhin ist $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i^+ = f^+$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i^- = f^-$. Nimmt man an, daß der Satz für $f_i \geq 0$ bereits bewiesen ist, so folgt, daß $f^+, f^- \in \mathfrak{C}_2$ und außerdem

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i^+ &= \int f^+ \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i^- &= \int f^- \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i^+ - \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i^- = \int f^+ - \int f^- = \int (f^+ - f^-) = \int f$$

Wir können also $f_i \geq 0$ annehmen. Man definiert nun für $m, k \geq 1$

$$u_k^m = \sup(f_m, \dots, f_{m+k-1})$$

und

$$v_k^m = \inf(f_m, \dots, f_{m+k-1}).$$

Es ist $u_k^m \leq u_{k+1}^m$ und $v_k^m \geq v_{k+1}^m$. Weiter ist $0 \leq u_k^m \leq h$ und $h \geq v_k^m \geq 0$. Also sind die Integralfolgen $\int u_k^m$ nach oben und $\int v_k^m$ nach unten beschränkt. Es existieren deshalb nach dem Satz von Beppo Levi $u_m, v_m \in \mathfrak{C}_2$ mit $u_k^m \nearrow_k u_m$ und $v_k^m \searrow_k v_m$.

Für sie gilt wegen $0 \leq u_k^m \leq h$ und $h \geq v_k^m \geq 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_m \leq h \\ 0 &\leq v_m \leq h \end{aligned}$$

sowie wegen $u_k^m \geq v_k^m$ auch

$$u_m \geq v_m$$

Nun ist weiter $u_k^m \geq u_{k-1}^{m+1}$ für $k > 1$, also

$$u_m \geq u_{m+1}.$$

Ebenso ist $v_k^m \leq v_{k-1}^{m+1}$ für $k > 1$ und deshalb

$$v_m \leq v_{m+1}$$

Da die Integralfolgen $\int u_m \geq 0$ und $\int v_m \leq \int h$ beschränkt sind, existieren wieder nach dem Satz von Beppo Levi $u, v \in \mathfrak{C}_2$ mit

$$\begin{array}{c} u_m \searrow u \\ v_m \nearrow v \end{array}$$

Wir werden zeigen, daß $u = v = f$ mit dem f aus der Formulierung des Satzes. Es sei nämlich ein $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer geeigneten Nullmenge N : Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m_0(\varepsilon)$, so daß $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $m \geq m_0$ ist. Also ist für

$$S_x = \sup(f_{m_0}(x), f_{m_0+1}(x), \dots)$$

auch $|f(x) - S_x| \leq \varepsilon$. Nun ist aber $u_k^{m_0}(x) \leq S_x$ für alle $k \geq 1$, also wegen $u_k^m \nearrow u_m$ auch $u_{m_0}(x) \leq S_x$. Da $u_{m+1} \leq u_m$ ist sogar $u_m(x) \leq S_x$ für alle $m \geq m_0$.

Durch eine duale Überlegung ergibt sich mit $m \geq m'_0$, daß für

$$T_x = \inf(f_{m'_0}(x), f_{m'_0+1}(x), \dots)$$

auch $|f(x) - T_x| \leq \varepsilon$ und außerdem $v_m(x) \geq T_x$ für alle $m \geq m'_0$ ist. Es ist also für $m \geq m_0, m'_0$ immer

$$S_x \geq u_m(x) \geq v_m(x) \geq T_x$$

mit $|f(x) - S_x| < \varepsilon$ und $|f(x) - T_x| < \varepsilon$. Es folgt $|f(x) - u_m(x)| \leq \varepsilon$ und $|f(x) - v_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $m \geq m_0, m'_0$. Also ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m(x) = f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x).$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer geeigneten Nullmenge N .

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i = \int u = \int v = \int f$ ist: Man hat ja (wegen $u_k^m \geq f_m$ und $v_k^m \leq f_m$) auch $u_m \geq f_m \geq v_m$ und deshalb auch $\int u_m \geq \int f_m \geq \int v_m$. Macht man den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ergibt sich aus $\int u_m \searrow \int u$ und $\int v_m \nearrow \int v$ die Behauptung.

2.5 Fundamentalsätze der Funktionalanalysis

Definition 2.5.1. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt nirgends dicht in X falls sie keine in X offene Teilmenge $U \subseteq X$ enthält.

Theorem 2.5.1 (Bairescher Kategoriensatz). *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Weiter sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie in X nirgends dichter Teilmengen $A_i \subseteq X$.*

Dann ist auch

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

nirgends dicht.

Beweis. Es enthalte A doch ein $U = U_0 = B(x_0, r_0)$. Dann ist $U_0 \not\subseteq A_1$ und es gibt eine Kugel $B(x_1, 2r_1) \subseteq U - A_1$ mit $r_1 < r_0/2$ und $B(x_1, 2r_1) \cap A_1 = \emptyset$. Wir setzen $U_1 = B(x_1, r_1)$.

Diese Kugel U_1 ist nicht in A_2 und es gibt eine Kugel $B(x_2, 2r_2) \subseteq U_1$ mit $B(x_2, 2r_2) \cap A_2 = \emptyset$ und $r_2 < r_1/2$. Für diese ist auch $B(x_2, 2r_2) \cap A_1 = \emptyset$. Wir setzen $U_2 = B(x_2, r_2)$.

Induktiv konstruiert man so $B(x_n, 2r_n) \subseteq U_{n-1}$ mit $r_n < r_{n-1}/2 < r_0/2^n$ und $B(x_n, 2r_n) \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \emptyset$, sowie $U_n = B(x_n, r_n)$ mit $U_n \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \emptyset$.

Man hat die Inklusionen $\dots U_{i-1} \supseteq B(x_i, 2r_0) \supseteq U_i \supset B(x_{i+1}, 2r_{i+1}) \supseteq U_{i+1} \dots$.

Die x_n bilden offensichtlich eine Cauchy-Folge und konvergieren gegen ein $x \in \bar{U}$. Dieses x liegt in jedem U_i . Es ist nämlich $x \in \bar{U}_i$ und $\bar{U}_i \subseteq B_{\leq r_i}(x_i) \subseteq B(x_i, 2r_i) = B_{< 2r_i}(x_i) \subseteq U_{i-1}$.

Andererseits ist $x \in A_m$ für ein bestimmtes m nach Annahme $U \subseteq A$. Also wäre $A_m \cap U_{m'} \neq \emptyset$ mit $m' > m$ im Widerspruch zu $U_{m'} \cap \bigcup_{i=1}^{m'} A_i = \emptyset$.

Theorem 2.5.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Weiter sei $F \subseteq C^0(X, Y)$ eine Familie stetiger Funktionen. Für diese gelte*

$$\sup_{f \in F} \|f(x)\| < C_x < \infty$$

für jedes $x \in X$. Dann gibt es einen offenen Ball $B(x_0, r) \subseteq X$ mit

$$\sup_{x \in B(x_0, r)} \sup_{f \in F} \|f(x)\| < C$$

mit einem geeigneten $C > 0$.

Beweis. Setze $B_n = B_{r \leq n}(0) \subseteq Y$, ein System abgeschlossener Teilmengen, und $A_n = \bigcup_{f \in F} f^{-1}(B_n)$, ebenfalls abgeschlossen als Schnitt der abgeschlossenen $f^{-1}(B_n)$. Es ist dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, denn für jedes $x \in X$ ist $\{f(x) \mid f \in F\} \subseteq B_{n_x}$ für ein geeignetes $n_x \in \mathbb{N}$.

Da X nicht nirgends dicht ist, enthält ein A_{n_0} ein offenes $U = B(x_0, r)$. Dies ist der gesuchte offene Ball und es kann $C = n_0 + 1$ gewählt werden.

Theorem 2.5.3 (Banach–Steinhaus). *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Weiter sei $F \subseteq L(X, Y)$ eine Familie linearer, stetiger, also beschränkter Funktionen, und es gelte*

$$\sup_{f \in F} \|f(x)\| < C_x < \infty$$

für jedes $x \in X$. Dann ist auch

$$\sup_{f \in F} \|f\| < C < \infty$$

Beweis. Es sei $U = U(x_0, r) \subseteq X$ der nach dem vorigem Theorem existierende offene Ball mit $\sup_{f \in F} \sup_{x \in U} \|f(x)\| < C$. Es gilt für h mit $\|h\| < r$, daß $f(h) = f(h + x_0 - x_0)$, also

$$\|f(h)\| \leq \|f(h + x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq C + C_{x_0}.$$

Es ist also $f(B_X(0, r)) \subseteq B_Y(0, C + C_{x_0})$ unabhängig von f . Also $\|f\| \leq (C + C_{x_0})/r$ für alle $f \in F$.

Theorem 2.5.4 (Satz von der offenen Abbildung). *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung $f \in L(X, Y)$ zwischen den Banach-Räumen X, Y . Dann ist äquivalent*

- a) f ist surjektiv.
- b) f ist offen.

Beweis. Sei zunächst f surjektiv. Es sei $B_n = B_n(0, n)$ ein System offener Kugeln und $Z_n = \overline{f(B_n)}$. Da f surjektiv, ist $Y = \bigcup_n f(B_n) = \bigcup_n Z_n$. Also enthält nach dem Kategoriensatz ein Z_n eine offene Kugel

$$V' = V'(y_0, r) \subseteq \overline{f(B_n)} = Z_n$$

Wähle $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$, so ist $f(B_n - x_0)$ dicht in $V' - y_0 = V''(0, r) = V''$. Da $B_n - x_0 \subseteq B_{n'}$ für ein geeignetes n' ist auch $f(B_{n'})$ dicht in $V''(0, r)$. Homothetie mit $1/r$ zeigt: Es ist $f(B(0, n'/r)) = f(B(0, s))$ dicht in $V = V(0, 1)$. Nenne $W = f(B(0, s)) \cap V$, es ist dicht in V nach Konstruktion.

Für ein beliebiges $y \in V$ wähle ein $y_1 \in W$ mit $\|y_1 - y\| < 1/2$ und ein $x_1 \in B(0, s)$ mit $f(x_1) = y_1$.

Wähle dann ein y_2 mit $\|y_2 - y_1\| < 1/2$ und $\|y_2 - y\| < 1/4$, so daß $y_2 \in y_1 + 1/2W$ ist.

Es gibt dann ein $x_2 \in 1/2B(0, s)$ mit $f(x_2) = y_2 - y_1$.

Wähle nun ein y_3 mit $\|y_3 - y_2\| < 1/4$ und $\|y_3 - y\| < 1/8$, so daß $y_3 \in y_2 + 1/4W$ ist.

Es gibt dann ein $x_3 \in 1/4B(0, s)$ mit $f(x_3) = y_3 - y_2$

Das k -te Glied dieser Folge besteht aus y_k mit $\|y_k - y_{k-1}\| < 1/2^{k-1}$ und $\|y_k - y\| < 1/2^k$, so daß $y_k \in y_{k-1} + 1/2^{k-1}W$ ist.

Es ist dann $x_k \in 1/2^{k-1}B(0, s)$ und es ist $f(x_k) = y_k - y_{k-1}$.

Die Summe $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ konvergiert dann gegen ein x mit $\|x\| \leq s + 1/2s + 1/4s + \dots = 2s$. Für dieses x ist

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots = y$$

Also ist $f(B_{\leq 2s}(0)) \supseteq V$ und damit auch $f(B(0, 4s)) \supseteq V$. Wir haben damit eine offene Kugel um Null in X gefunden, deren Bild die offene Kugel in Y um Null

mit Radius 1 enthält. Damit ist aber f als offene Abbildung nachgewiesen, denn es ist für eine offene Menge $U \subseteq X$, wenn man für $x \in U$ die Zahl λ_x so wählt, daß $\lambda_x B(0, 4s) + x \subseteq U$ ist:

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f(\lambda_x B(0, 4s) + x) = \bigcup_{x \in U} \lambda_x V + f(x) \subseteq Y \quad (2.72)$$

eine offene Menge, da alle $\lambda_x V + f(x)$ offen sind.

Sei schließlich umgekehrt f offen, so enthält $f(B(0, 1))$ eine offene Menge $V = B_Y(0, r)$. Also umfaßt $f(B(0, t))$ die Kugel tV , also mit wachsendem t alle $y \in Y$.

Proposition 2.5.1. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ mit $f \in L(X, Y)$ eine stetige Abbildung zwischen Banach-Räumen X, Y . Ist dann f bijektiv, so ist $f^{-1} \in L(Y, X)$, also stetig.*

Theorem 2.5.5 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung zwischen den Banach-Räumen. Es ist äquivalent*

- a) $f \in L(X, Y)$
- b) Der Graph von f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

ist abgeschlossen im Banachraum $X \times Y$.

Algebraische Topologie

3.1 Grundlagen

3.1.1 Methode der azyklischen Modelle

Es sei \mathbf{C} eine Kategorie und \mathbf{M} eine Menge von Objekten von \mathbf{C} .

Definition 3.1.1. *Es sei $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ein kovarianter Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen.*

Es gebe eine Familie

$$\{g_j \in G(M_j)\}_{j \in J}$$

von Objekten M_j aus \mathbf{M} und Elementen $g_j \in G(M_j)$. Weiter sei für jedes $X \in \text{Obj } \mathbf{C}$ die Menge

$$G_{\text{bas}}(X) = \{G(f)(g_j) \in G(X) \mid f \in \text{Hom}(M_j, X), j \in J\} \subseteq G(X)$$

eine freie Basis von $G(X)$. Dann heißt die Familie $\{g_j \in G(M_j)\}_{j \in J}$ eine Basis des Funktors G .

Der Funktor G heißt freier Funktor auf \mathbf{C} mit Modellen aus \mathbf{M} .

Anmerkung 3.1.1. Ist $h : X \rightarrow Y$ aus $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, so bildet $G(h)$ die Menge $G_{\text{bas}}(X)$ nach $G_{\text{bas}}(Y)$ ab. Es ist also auch $X \mapsto G_{\text{bas}}(X)$ ein Funktor von \mathbf{C} nach \mathbf{Set} . Zusammen mit dem Funktor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ab}$, der jeder Menge die zugehörige freie abelsche Gruppe zuordnet, gilt also $G = F \circ G_{\text{bas}}$.

Definition 3.1.2. *Es sei $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CmplxAb}$ ein Funktor in die Kategorie der abelschen Komplexe. Dann besteht G aus Teilfunktoren G_q .*

Sind alle diese G_q freie Funktoren mit Modellen aus \mathbf{M} , so heiße G frei mit Modellen aus \mathbf{M} .

Es sei $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CmplxAb}$ ein Funktor in die Kategorie der abelschen Komplexe. Dann sind kanonisch die Funktoren $H_q(G) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ durch

$$H_q(G)(X) = H_q(G(X)) = \ker(d_q(X) : G_q(X) \rightarrow G_{q-1}(X)) / \operatorname{im}(d_{q+1}(X) : G_{q+1}(X) \rightarrow G_q(X))$$

definiert.

Definition 3.1.3. Für eine Kategorie \mathbf{C} mit Modellen \mathbf{M} heiÙe ein Funktor $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CmplxAb}$ azyklisch in den positiven Dimensionen, wenn

$$H_q(G(M)) = 0$$

für alle $q > 0$ und alle M aus \mathbf{M} ist.

Definition 3.1.4. Ein Funktor $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CmplxAb}$ heiÙe nichtnegativ, wenn für $q < 0$ immer $G_q = 0$, also $G_q(X) = 0$ ist.

Theorem 3.1.1. Es sei \mathbf{C} eine Kategorie mit Modellen \mathbf{M} . Weiter seien

$$G, G' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CmplxAb}$$

zwei Funktoren in die Kategorie der abelschen Komplexe.

Es sei G ein freier, nichtnegativer Funktor und G' azyklisch in den positiven Dimensionen. Dann gilt

1. Ist

$$\tau : H_0(G) \rightarrow H_0(G')$$

eine natürliche Abbildung abelscher Gruppen, dann existiert eine natürliche Abbildung von Komplexen $\phi : G \rightarrow G'$, so daÙ

$$H_0(\phi) = \tau$$

ist.

2. Sind $\phi, \psi : G \rightarrow G'$ zwei natürliche Abbildungen von Komplexen mit

$$H_0(\phi) = H_0(\psi)$$

so existiert eine natürliche Kettenhomotopie $k : G \rightarrow G'$, also ein natürliches System von Abbildungen mit

$$k(X)_i : G_i(X) \rightarrow G'_{i+1}(X)$$

und

$$\phi(X)_i - \psi(X)_i = k(X)_{i-1}d(X)_i + d'(X)_{i+1}k(X)_i$$

wobei $d(X)_i : G_i(X) \rightarrow G_{i-1}(X)$ und $d'(X)_i : G'_i(X) \rightarrow G'_{i-1}(X)$ die mit (G, d) und (G', d') verbundenen natürlichen Differentiale sind.

Beweis. 1. Wir konstruieren die $\phi_i(X) : G_i(X) \rightarrow G'_i(X)$ mit wachsenden Indizes $i \geq 0$ von unten nach oben: Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0(X) & \longrightarrow & G_0(X)/\text{im } d(X)_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow u & & \downarrow \tau(X) & & \\
 \ker d'(X)_0 & \longrightarrow & \ker d'(X)_0/\text{im } d'(X)_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \subseteq & & & & \\
 G'_0(X) & & & &
 \end{array}$$

Es seien $g_{0j} \in G_0(M_{0j})$ die Basiserzeugenden für G_0 . Setzt man dann in obigem Diagramm $X = M_{0j}$, so ergibt sich aus der Konstruktion von $u_{0j} := u$ das Bild $g'_{0j} \in G'_0(M_{0j})$ und allgemein aus $f : M_{0j} \rightarrow X$ das Bild $G(f)(g'_{0j}) \in G'_0(X)$ von $G(f)(g_{0j}) \in G_0(X)$.

Es seien nun für $p < i$ die natürlichen Transformationen $\phi_p(X) : G_p(X) \rightarrow G'_p(X)$ schon konstruiert, so daß auch $\phi_{p-1} \circ d_p = d'_p \circ \phi_p$ für alle $p < i$ gilt.

Ist nun $g_{ij} \in G_i(M_{ij})$, mit $\{g_{ij} \in G_i(M_{ij})\}$ den Basiserzeugenden von G_i , so ist

$$d'_{i-1}\phi_{i-1}d_i(g_{ij}) = \phi_{i-2}d_{i-1}d_i(g_{ij}) = 0.$$

Da $H_{i-1}(G') = 0$ existiert ein $g'_{ij} \in G'_i(M_{ij})$ mit

$$d'_i g'_{ij} = \phi_{i-1}d_i(g_{ij})$$

Setzt man $\phi_i(M_{ij})(g_{ij}) = g'_{ij}$, so hat man ϕ_i auf den Basiserzeugenden konstruiert. Allgemein ist dann für $f : M_{ij} \rightarrow X$ immer

$$\phi_i(X)(G_i(f)(g_{ij})) = G'_i(f)(\phi_i(M_{ij})(g_{ij})) = G'_i(f)(g'_{ij})$$

und damit $\phi_i(X) : G_i(X) \rightarrow G'_i(X)$ für jedes X konstruiert.

2. Schreibt man $\chi = \phi - \psi$, so induziert $\chi : H_0(G) \rightarrow H_0(G')$ die Nullabbildung und es genügt für χ eine natürliche Kettenhomotopie

$$k(X)_i : G_i(X) \rightarrow G'_{i+1}(X)$$

mit

$$\chi(X)_i = k(X)_{i-1}d(X)_i + d'(X)_{i+1}k(X)_i \tag{3.1}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ zu konstruieren. Wir setzen zunächst $k_i = 0$ für alle $i < 0$. Nun bildet $\chi_0(X)$ den Kern $\ker d_0(X) = G_0(X)$ wegen $H_0(\chi) = 0$ auf $\text{im } d'_1(X)$ ab. Wir haben also Abbildungen

$$\chi(X)_0 : G_0(X) \rightarrow \text{im } d'_1(X) \subseteq G'_0(X)$$

Für $X = M_{0j}$ und $g_{0j} \in G_0(M_{0j})$ ist also $\chi_0(g_{0j}) = d'_1(g'_{0j})$ mit $g'_{0j} \in G'_1(M_{0j})$. Man definiert nun

$$k_0(M_{0j})(g_{0j}) = g'_{0j} \in G'_1(M_{0j}).$$

Allgemein ist dann für $f : M_{0j} \rightarrow X$

$$k_0(X)(G_0(f)(g_{0j})) = G'_1(f)(g'_{0j})$$

eine auf der Basis von $G_0(X)$, also auf $\{G(f)(g_{0j})\}$ festgelegte natürliche Abbildung $k_0(X) : G_0(X) \rightarrow G'_1(X)$.

Damit ist jetzt (3.1) für alle $i \leq 0$ konstruiert. Wir nehmen nun an, daß sie bereits für $i < p$ konstruiert ist.

Es ist dann

$$d'_p(\chi_p - k_{p-1}d_p) = \chi_{p-1}d_p - d'_p k_{p-1}d_p = (\chi_{p-1} - d'_p k_{p-1})d_p = k_{p-2}d_{p-1}d_p = 0$$

für jedes X aus \mathbf{C} . Es liegt also für $g_{pj} \in G_p(M_{pj})$

$$g'_{pj} = (\chi_p - k_{p-1}d_p)(g_{pj}) \in G'_p(M_{pj})$$

in $\ker d'(M_{pj})_p$.

Da $H_p(G') = 0$ ist also $g'_{pj} = d'(M_{pj})_{p+1}(g''_{pj})$ mit $g''_{pj} \in G'_{p+1}(M_{pj})$. Setzt man nun

$$k_p(M_{pj})(g_{pj}) = g''_{pj}$$

so hat man k_p auf die $g_{pj} \in G_p(M_{pj})$ ausgedehnt. Für beliebiges X und alle Abbildungen $f : M_{pj} \rightarrow X$ ist dann

$$k_p(X)(G_p(f)(g_{pj})) = G'_{p+1}(f)(g''_{pj})$$

und damit $k_p(X)$ auf der Basis $\{G_p(f)(g_{pj})\}$ von $G_p(X)$ eindeutig festgelegt. Es ist nach Konstruktion klar, daß jetzt auch (3.1) für $i = p$ gilt.

Übungsaufgaben aus „3264 and all that“

4.1 Kapitel 2

4.1.1 Übungsaufgabe 2.23

Es sei $\nu = \nu_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ die quadratische Veronese–Abbildung. Weiter sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ eine Kurve vom Grad d . Zeige, daß $\nu(C)$ den Grad $2d$ hat.

Allgemein sei $\nu = \nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ die Veronese–Abbildung vom Grad d . Weiter sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Varietät mit Dimension k und Grad e . Dann ist

$$\deg \nu(X) = d^k e \quad (4.1)$$

Beweis. $\deg X$ ist die Anzahl der Schnittpunkte von $\nu(X)$ mit k generischen Hyperebenen im \mathbb{P}^N : Man hat

$$\nu_*[X] \cap H_1 \cap \cdots \cap H_k = \nu_*([X] \cap \nu^* H_1 \cap \cdots \cap \nu^* H_k) \quad (4.2)$$

Nun ist $\nu^* H_i = K_i$ eine Hyperfläche vom Grad d in \mathbb{P}^n . Der Schnitt der Varietät X vom Grad e mit k generischen Hyperflächen vom Grad d ist also ein nulldimensionaler Zykel vom Grad ed^k , wie verlangt.

4.1.2 Übungsaufgabe 2.24

Es sei $\sigma = \sigma_{r,s} : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ die Segre–Abbildung und $X \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ eine Untervarietät der Kodimension k . Die Klasse $[X] \in A^k(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$ sei gegeben durch

$$[X] = \sum_i c_i \alpha^{k-i} \beta^i \quad (4.3)$$

wobei $c_i = 0$ ist, falls $i > s$ oder $k - i > r$ ist. Die Elemente α, β sind die Urbilder der Hyperebenenklassen aus $A^1(\mathbb{P}^r)$, $A^1(\mathbb{P}^s)$ in $A^1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$.

- Es ist $c_i \geq 0$ für alle i .
- Was ist der Grad von $\sigma(X) \subseteq \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$?

- c) Ein linearer Teilraum $A \subseteq \Sigma_{r,s} = \sigma(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$ liegt entweder in der Faser von $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^r$ oder in der Faser von $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^s$ jeweils über einem abgeschlossenen Punkt.

Beweis. b) Es ist $\deg \sigma(X)$ gleich dem Schnitt von $\dim X = r + s - k$ Hyperflächen im $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ mit $\sigma(X)$:

$$\sigma_*[X] \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{r+s-k} = \sigma_*([X] \cap \sigma^* H_1 \cap \cdots \cap \sigma^* H_{r+s-k})$$

Der Schnitt rechts ist in $A(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$. Da $\alpha + \beta$ die Klasse von $\sigma^*(H_i)$ ist, folgt, daß $\deg \sigma(X)$ der Koeffizient von $\alpha^r \beta^s$ in folgendem Ausdruck ist:

$$\begin{aligned} [X](\alpha + \beta)^{r+s-k} &= \sum_{i,j} c_i \alpha^{k-i} \beta^i \binom{r+s-k}{j} \alpha^j \beta^{r+s-k-j} = \\ &= \sum_{i,j} c_i \binom{r+s-k}{j} \alpha^{k+j-i} \beta^{r+s-k-j+i} = \end{aligned} \quad (4.4)$$

In dieser Summe muß $k+j-i = r$ sein, da für $k+j-i < r$ auch $r+s-k-j+i > s$ wäre, und der Summand verschwände. Also können wir $i = k+j-r$ setzen und erhalten

$$\deg \sigma(X) = \sum_{j=0}^{r+s-k} c_{k+j-r} \binom{r+s-k}{j} \quad (4.5)$$

c) Ein linearer Teilraum von $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ also $\sigma(A') = A \subseteq \Sigma_{r,s}$ mit Kodimension k in $\Sigma_{r,s}$, also der Dimension $r+s-k$ schneidet sich mit $r+s-k$ -Hyperebenen in $\mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ zu einem Produkt mit Vielfachheit 1. Es ist also $\deg \sigma(A') = 1$.

Damit für $X = A'$ in der Gleichung (4.5) der Wert 1 herauskommt, muß $j = 0$ bzw. $j = r+s-k$ sein, und der Wert $c_{k-r} = 1$ bzw. $c_s = 1$ und alle anderen Null sein. Das entspricht $[X] = \alpha^r \beta^{k-r}$ bzw. $[X] = \alpha^{k-s} \beta^s$.

Ist nun $[X] = \alpha^r \beta^{k-r}$, so ist $[X] \cdot [E_r \times E_{k-r}] = 1$, wobei E_i für einen linearen Teilraum der Dimension i stehe. Diese seien generisch gewählt, so daß

$$[X] \cdot [E_r \times E_{k-r}] = X \cap (E_r \times E_{k-r}) = \{\text{pt.}\}$$

Also muß für die Projektion $\pi_1 : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \rightarrow \mathbb{P}^r$ gelten, daß $\pi_1(X) = \{\text{pt.}\}$ ist, also $X \subseteq \pi_1^{-1}(\{\text{pt.}\})$ wie behauptet.

Genauso argumentiert man im Fall $[X] = \alpha^{k-s} \beta^s$ und damit ist die Behauptung gezeigt.

4.1.3 Übungsaufgabe 2.25

Es sei $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ die rationale Abbildung

$$\varphi : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (1/x_0, 1/x_1, 1/x_2) = (x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1) \quad (4.6)$$

Es sei $\Gamma_\varphi \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ der Graph von φ . Was ist $[\Gamma_\varphi] \in A^2(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$?

Beweis. Es sei $A(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^3, \beta^3)$. Da $\dim \Gamma_\varphi = 2$ folgt

$$[\Gamma_\varphi] = c_0\alpha^2 + c_1\alpha\beta + c_2\beta^2$$

Man bestimmt die Koeffizienten c_i durch Schnitte mit $E_i \times E_j$, Produkten von generischen linearen Teilräumen. Zunächst ist

$$c_0 = [\Gamma_\varphi][E_2 \times E_0] = \#\{(p, q) \in \mathbb{P}^2 \times \{P\} \mid \varphi(p) = q = P\} = 1$$

und

$$c_2 = [\Gamma_\varphi][E_0 \times E_2] = \#\{(p, q) \in \{P\} \times \mathbb{P}^2 \mid q = \varphi(p) = \varphi(P)\} = 1$$

Es bleibt $c_1 = [\Gamma_\varphi][E_1 \times E'_1]$, wobei E_1, E'_1 generische Geraden in \mathbb{P}^2 sind. Wir suchen also $\#\{(p, q) \in E_1 \times E'_1 \mid \varphi(p) = q\} = \#(\varphi(E_1) \cap E'_1)$.

Nun ist $\varphi(E_1)$ eine Quadrik in \mathbb{P}^2 , die durch die drei ausgezeichneten Punkte $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{P}^2$ geht. Diese sind

$$Q_0 = (1 : 0 : 0), \quad Q_1 = (0 : 1 : 0), \quad Q_2 = (0 : 0 : 1).$$

Sind $l_0, l_1, l_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ die drei ausgezeichneten Geraden

$$x_0(l_0) = 0, \quad x_1(l_1) = 0, \quad x_2(l_2) = 0$$

so wird l_0 auf Q_0 , l_1 auf Q_2 und l_2 auf Q_1 abgebildet. Die Schnittpunkte $l_i \cap E_1$ werden also auf Q_0, Q_1, Q_2 abgebildet. Gleiches gilt für $l_i \cap E'_1$ mit einer anderen Geraden E'_1 . Die Quadriken $\varphi(E_1), \varphi(E'_1)$ schneiden sich also in vier Punkten, drei davon sind Q_0, Q_1, Q_2 , der vierte Q' ist das Bild von $P = E_1 \cap E'_1$.

Es ist also $\varphi(E_1)$ eine Quadrik in \mathbb{P}^2 , die sich mit einem generischen E'_1 in zwei Punkten schneidet. Damit ist $c_1 = 2$.

4.1.4 Übungsaufgabe 2.26

Es sei $\sigma : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^8$ die Segre–Abbildung. Finde die Klasse des Graphen Γ_σ von σ in $A(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^8)$!

Beweis. Es sei $A(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^8) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta, \gamma]/(\alpha^3, \beta^3, \gamma^9)$. Die Dimension von Γ_σ ist 4, also die Kodimension $4 + 8 - 4 = 8$.

Es ist deshalb

$$[\Gamma_\sigma] = \sum_{\substack{i+j+k=8 \\ i \leq 2, j \leq 2, \\ k \leq 8}} c_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k \tag{4.7}$$

Es ist dann (wieder steht E_i für einen generischen Teilraum der Dimension i):

$$\begin{aligned} c_{i,j,k} &= \deg[\Gamma_\sigma][E_i \times E_j \times E_k] = \\ &= \deg \sigma_*[E_i \times E_j][E_k] = \deg_{\mathbb{Z}[\alpha, \beta]}[E_i \times E_j][\sigma^* E_k] = \\ &= \deg_{\mathbb{Z}[\alpha, \beta]} \alpha^{2-i} \beta^{2-j} (\alpha + \beta)^{8-k} = \deg_{\mathbb{Z}[\alpha, \beta]} \binom{8-k}{i} \alpha^2 \beta^{2-j+8-k-i} = \\ &= \deg_{\mathbb{Z}[\alpha, \beta]} \binom{8-k}{i} \alpha^2 \beta^2 = \binom{8-k}{i} = \binom{8-k}{j} \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.5 Übungsaufgabe 2.27

Es sei $s : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^{2*}$ die rationale Abbildung, die $(p, q) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ die Gerade \overline{pq} zuordnet. Finde die Klasse des Graphen Γ_s in $A(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*})$!

Beweis. Es sei $A(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta, \gamma]/(\alpha^3, \beta^3, \gamma^3)$. Es ist $\dim \Gamma_s = 4$, also Kodimension gleich $6 - 4 = 2$. Man hat also

$$[\Gamma_s] = \sum_{\substack{i+j+k=2 \\ i \leq 2, j \leq 2, k \leq 2}} c_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k \quad (4.9)$$

Durch Schnitte mit $E_i \times E_j \times E_k$ ermitteln wir:

$$c_{i,j,k} = [\Gamma_s][E_i \times E_j \times E_k] = \#(s(E_i \times E_j) \cap E_k) \quad (4.10)$$

Wir diskutieren die einzelnen Fälle getrennt:

a) Es sei $k = 2, i = 0, j = 0$: Zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{P}^2$ werden auf eine beliebige Gerade $\overline{P, Q}$ in \mathbb{P}^{2*} abgebildet. Ergebnis: $c_{0,0,2} = 1$.

b) Es sei $k = 1, i = 0, j = 1$: E_k ist eine Gerade in \mathbb{P}^{2*} , also ein Bündel von Geraden in \mathbb{P}^2 mit Bündelpunkt R . $E_i = P$ ein Punkt in \mathbb{P}^2 , E_j ist eine Gerade in \mathbb{P}^2 . Wie viele Punkte $(P, Q) \in P \times E_j$ werden auf eine Gerade des Bündels abgebildet? Genau ein Paar (P, Q) wobei Q der Schnitt von E_j mit \overline{PR} ist.

Es ist also $c_{0,1,1} = c_{1,0,1} = 1$.

c) Es sei $k = 0, i = 2, j = 0$: Wie viele $(P, Q) \in \mathbb{P}^2 \times Q$ werden auf eine feste generische Gerade l in \mathbb{P}^2 abgebildet? Keine, wenn Q nicht auf l liegt, was der generische Zustand ist. Also $c_{2,0,0} = c_{0,2,0} = 0$.

d) Es sei $k = 0, i = 1, j = 1$: Wie viele $(P, Q) \in E_i \times E_j$ mit E_i, E_j generischen Geraden in \mathbb{P}^2 werden auf eine generische Gerade l in \mathbb{P}^2 abgebildet? Genau ein Paar (P, Q) , nämlich $P = l \cap E_i$ und $Q = l \cap E_j$.

Also ist $c_{1,1,0} = 1$.

4.1.6 Übungsaufgabe 2.28

Es sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche vom Grad d . Die Hyperfläche X sei außerhalb eines gewöhnlichen Doppelpunktes $P \in X$ glatt. (Es sei also $\mathbb{T}_P X$, der Tangentialkegel von X bei P , eine glatte Quadrik).

Es bezeichne $X^* \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ die duale Hyperfläche. Was ist der Grad von X^* ? (Antwort: $d(d-1)^{n-1} - 2$).

Beweis. Es sei $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ die Gleichung der Hyperfläche X , ein homogenes Polynom vom Grad d .

Die rationale Abbildung $G : X \rightarrow \mathbb{P}^{n*}$ ist

$$G : X \rightarrow \mathbb{P}^{n*} \quad (4.11)$$

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (Y_0 : \dots : Y_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_0} \Big|_{(x_0 : \dots : x_n)} : \dots : \frac{\partial f}{\partial X_n} \Big|_{(x_0 : \dots : x_n)} \right) \quad (4.12)$$

Die Varietät $G(X) = X^* \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ ist auch eine Hyperfläche. Ihr Grad d' ist die Anzahl der Punkte beim Schnitt von $G(X)$ mit $n - 1$ generischen Hyperebenen

$$H_j = V(a_0^j Y_0 + \dots + a_n^j Y_n)$$

im \mathbb{P}^{n*} .

Jede Hyperebene $H_j \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ zieht sich über G^* zurück zu einer Hyperfläche $K_j = G^* H_j \subseteq \mathbb{P}^n$ vom Grad $d - 1$:

$$K_j = G^* H_j = V(a_0^j \frac{\partial f}{\partial X_0} + \dots + a_n^j \frac{\partial f}{\partial X_n})$$

wobei $a_0^j, \dots, a_n^j \in k$ generisch gewählte Konstanten aus dem Grundkörper k sind.

Wir nehmen nun an, daß der singuläre Punkt P von X gleich $(1 : 0 : \dots : 0)$ ist. Es hat dann $f(X_0, \dots, X_n)$ nach einer geeigneten projektiv-linearen Koordinatentransformation die Form

$$X_0^{d-2} X_1^2 + \dots + X_0^{d-2} X_n^2 + g(X_0, \dots, X_n)$$

wobei der Grad von g in X_1, \dots, X_n größer als 2 ist. Der Tangentialkegel von X bei P ist also

$$V(x_1^2 + \dots + x_n^2) \subseteq \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$$

Einschub: Der Tangentialkegel von $V(I) \subseteq \text{Spec}(A)$ bei $\mathfrak{m} \subseteq A$, maximales Ideal, ist ja

$$\text{Spec} \left(\sum_{r \geq 0} (\mathfrak{m}^r + I) / (\mathfrak{m}^{r+1} + I) \right)$$

Geht man von der Sequenz $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ und den unterliegenden Filtrierungen $\mathfrak{m}^r \cap I$, \mathfrak{m}^r , $\mathfrak{m}^r + I/I$ aus, so folgt aus

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}} I \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}} A \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}}(A/I) \rightarrow 0$$

daß

$$(\mathfrak{m}^r + I) / (\mathfrak{m}^{r+1} + I) = (\mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}) / (\mathfrak{m}^r \cap I + \mathfrak{m}^{r+1}) / \mathfrak{m}^{r+1}$$

Nebenbemerkung: Man verwende die Identitäten

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) / \mathfrak{b} = \mathfrak{a} / (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

und

$$(\mathfrak{m}^r \cap I) + \mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{m}^r \cap (\mathfrak{m}^{r+1} + I)$$

Es ist also

$$\mathbb{T}_{\mathfrak{m}} V(I) = V(\text{gr}_{\mathfrak{m}} I) = V(\{f_h = f + \mathfrak{m}^{r+1} \mid f \in I \cap \mathfrak{m}^r, f \notin \mathfrak{m}^{r+1}\}) \subseteq \text{Spec}(\text{gr}_{\mathfrak{m}} A)$$

Es steht hier f_h für den homogenen Anteil vom kleinsten Grad von f bezüglich der Filtrierung \mathfrak{m}^r von A .

In unserem Beispiel ist $A = k[x_1, \dots, x_n]$ und $V(\mathfrak{m}) = P = (0, \dots, 0)$. Für $\mathbb{T}_P X$ ist dann $I = f(1, x_1, \dots, x_n)A$ und $\text{gr}_P I = (x_1^2 + \dots + x_n^2)$.

Für die Tangentialkegel der $K_j = G^* H_j$ bei P gilt wegen

$$K_j = V\left(\sum_{i=0}^n a_i^j \frac{\partial f}{\partial X_i}\right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial X_0} = (d-2)X_0^{d-3}(X_1^2 + \dots + X_n^2) + \frac{\partial g}{\partial X_0} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = 2X_0^{d-2}X_i + \frac{\partial g}{\partial X_i} \quad (4.14)$$

daß

$$\mathbb{T}_P K_j = V(2(a_1^j x_1 + \dots + a_n^j x_n)) \subseteq \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$$

(Man setze $X_0 = 1$ und $X_i = x_i$ in dem homogenen Polynom $\sum_{i=0}^n a_i^j \frac{\partial f}{\partial X_i}$ und behalte nur den in x_1, \dots, x_n homogenen Anteil niedrigsten Grades, also hier den linearen Anteil).

Man erkennt, daß bei generischer Wahl der a_i^j die Tangentialkegel $\mathbb{T}_P X$ und $\mathbb{T}_P K_j$ sich nur in P treffen, also projektiv disjunkt sind.

Weiterhin ist $\text{mult}_P K_j = 1$ und nach Voraussetzung $\text{mult}_P X = 2$. Da die Tangentialkegel projektiv disjunkt sind, ist (Proposition 1.29 von [3264 and all that]):

$$\text{deg}(K_1 \cap \dots \cap K_{n-1} \cap X)_P = (\text{mult}_P X) \prod_{j=1}^{n-1} (\text{mult}_P K_j) = 2$$

Die Hyperflächen K_1, \dots, K_{n-1} schneiden X also in $d(d-1)^{n-1}$ Punkten, zu denen immer P gehört, dort ist die Schnittmultiplizität gleich 2.

Der Punkt P gehört aber nicht zum Definitionsbereich von G , da dort alle $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ verschwinden. Daher ist dieser Punkt aus der Zählung auszunehmen und es ergibt sich schließlich für den Grad von $G(X)$:

$$d' = d(d-1)^{n-1} - 2$$

4.1.7 Übungsaufgabe 2.29

Es sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Untervarietät der Dimension k und vom Grad d . Weiter sei $P \in X$ der einzige singuläre Punkt von X und es sei $m = \text{mult}_P X$ die Multiplizität von X in P , also der Grad des Tangentialkegels $\mathbb{T}_P X$.

Die Projektion $\pi_P : \mathbb{P}^n - P \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ induziere eine birationale Abbildung $\pi_P : X - P \rightarrow X' = \pi_P(X - P)$. Was ist der Grad von X' ? (Antwort: $d - m$).

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, daß für $k < n - 1$ die Abbildung $\pi_P : X - P \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ im Allgemeinen injektiv ist, also eine Birationalität aufs Bild X' induziert.

Es sei

$$\Phi = \{(R, S) \in X \times X \mid \overline{PRS} \text{ ist eine Gerade}\}$$

Das Bild von Φ in X unter der ersten (oder zweiten) Projektion ist die Menge der $Q \in X$, für die $\pi_P^{-1}(\pi_P(Q))$ aus mehr als einem Punkt besteht.

Die Bedingung „ \overline{PRS} ist eine Gerade“ entspricht der Bedingung, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} p_0 & \dots & p_n \\ r_0 & \dots & r_n \\ s_0 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

Rang 2 hat, also alle 3×3 -Minoren verschwinden.

Dies entspricht $n - 1$ unabhängigen Bedingungen für eine $2k$ -dimensionale Varietät. Damit $\dim \Phi \geq k$ ist, muß also $2k - (n - 1) \geq k$ gelten, also $k \geq n - 1$ sein.

Somit ist für $k < n - 1$ das Bild von Φ in X (unter der ersten oder zweiten Projektion) generisch stets eine echte Teilmenge und damit $\pi_P : X - P \rightarrow X'$ generisch birational.

Die Abbildung $\pi_P : \mathbb{P}^n - P \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ induziert eine Abbildung $\tilde{\pi}_P : B \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, wobei $B = \text{Bl}_P \mathbb{P}^n$ die Aufblasung von \mathbb{P}^n in P ist. Die Striktttransformierte von $X \subseteq \mathbb{P}^n$ sei \tilde{X} und man hat nach Proposition 2.14

$$[\tilde{X}] = (d - m)\lambda_k + m\gamma_k \tag{4.15}$$

in $A(B)$ mit den dortigen Bezeichnungen.

Es ist $\tilde{\pi}_P(\tilde{X}) = \pi_P(X - P) = X'$. Für den Grad von X' gilt

$$\text{deg } X' = \text{deg}(\tilde{\pi}_{P*}(\tilde{X}) \cap H_1 \cap \dots \cap H_k) \tag{4.16}$$

wobei H_1, \dots, H_k generische Hyperebenen in \mathbb{P}^{n-1} sind. Nach der Projektionsformel gilt

$$\tilde{\pi}_{P*}([\tilde{X}] \cap H_1 \cap \dots \cap H_k) = \tilde{\pi}_{P*}([\tilde{X}] \cap \tilde{\pi}_P^* H_1 \cap \dots \cap \tilde{\pi}_P^* H_k) \tag{4.17}$$

Nun ist aber $\tilde{\pi}_P^* H_j$ nichts anderes als γ_{n-1} und somit

$$\tilde{\pi}_P^* H_1 \cap \dots \cap \tilde{\pi}_P^* H_k = \gamma_{n-k}$$

Nach Proposition 2.13 ist $\lambda_k \gamma_{n-k} = \lambda_{k+n-k-n} = \lambda_0$, denn $k + (n - k) = n \geq n$. Weiter ist $\gamma_k \gamma_{n-k} = 0$, denn $k + (n - k) \not\geq n + 1$. Berücksichtigt man nun (4.15), (4.16) und (4.17), so ergibt sich insgesamt $\text{deg } X' = d - m$.

4.1.8 Übungsaufgabe 2.31

Es sei für $t \neq 0$ die Abbildung $A_t : \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$ gegeben durch

$$A_t(x_0 : \dots : x_r) = (x_0 : tx_1 : t^2x_2 : \dots : t^rx_r)$$

Weiter sei $\Phi \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ der Abschluß von

$$\Phi^\circ = \{(t, p, q) \mid t \neq 0, A_t(p) = q\}$$

Bestimme die Faser $\Phi_{t=0}$ über $t = 0$ und leite daraus die Formel für die Klasse der Diagonalen $[\Delta(\mathbb{P}^r)]$ in $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ ab!

Beweis. Es sei $R = k[t]$ und $S \subseteq S' = R[x_0, \dots, x_r, y_0, \dots, y_r]$ der Unterring der in den x_i und den y_j vom gleichen Grad homogenen Polynome. Weiterhin sei $S^\circ = S[1/t] = S_t$.

Ist $p = (x_0 : \dots : x_r)$ und $q = (y_0 : \dots : y_r)$, so drückt sich die Bedingung $A_t(p) = q$ durch das Verschwinden der 2×2 -Minoren in

$$\begin{pmatrix} x_0 & tx_1 & t^2x_2 & \dots & t^rx_r \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{pmatrix}$$

aus. Dies ergibt die Polynome

$$y_j x_i t^i - y_i x_j t^j = \gamma'_{ji}$$

mit $j > i$. Dividieren wir durch t^i entstehen die

$$y_j x_i - t^{j-i} y_i x_j = \gamma_{ji}$$

Es sei $I' = (\gamma_{ji}) \subseteq S$ das von den γ_{ji} erzeugte Ideal in S .

Wir zeigen, daß $(S/I')_{(x_k y_l)}$ für $k, l = 0, \dots, r$ immer ein Integritätsring ist. Damit ist $V(I') \subseteq \text{proj}(S)$ eine irreduzible Varietät.

Für $j > i$ beginnen wir mit

$$y_j x_i - t^{j-i} y_i x_j = \gamma_{ji}$$

dividieren durch $x_k y_l$ und erhalten

$$\frac{y_j}{y_l} \frac{x_i}{x_k} - t^{j-i} \frac{y_i}{y_l} \frac{x_j}{x_k} = \frac{\gamma_{ji}}{x_k y_l}$$

Wir setzen $i = k$ und erhalten mit der Nebenbedingung $j > k$:

$$\frac{y_j}{y_l} - t^{j-k} \frac{y_k}{y_l} \frac{x_j}{x_k} = \alpha_{jkl}$$

Indem man mit γ_{ij} statt mit γ_{ji} beginnt erhält man denselben Ausdruck für α_{jkl} und $j < k$.

Wir können also alle $\frac{y_j}{y_l}$ mit $j \neq k$ durch $\frac{x_j}{x_k}$ und $\frac{y_k}{y_l}$ ausdrücken. Ist $k = l$, so sind dies alle $\frac{y_j}{y_l}$ und für $k \neq l$ ist mit $j = l$

$$1 - t^{l-k} \frac{y_k}{y_l} \frac{x_l}{x_k} = 0$$

Man rechnet aus, daß alle Erzeuger $(\gamma_{rs})_{r>s}$ von I' modulo den α_{jkl} in $S_{(x_k y_l)}$ verschwinden, also das Ideal $I'_{(x_k y_l)}$ von den α_{jkl} erzeugt wird.

Also ist für $k = l$ der Ring

$$(S/I')_{(x_k y_l)} = R\left[\frac{x_j}{x_k}, \frac{y_j}{y_l}\right]/(\alpha_{jkl}) = R\left[\frac{x_j}{x_k}\right]$$

offensichtlich ein Integritätsring.

Ebenso ist für $k \neq l$ der Ring

$$(S/I')_{(x_k y_l)} = R\left[\frac{x_j}{x_k}, \frac{y_j}{y_l}\right]/(\alpha_{jkl}) = R\left[\frac{x_j}{x_k}, \frac{y_k}{y_l}\right]/\left(1 - t^{l-k} \frac{y_k}{y_l} \frac{x_l}{x_k}\right)$$

ein Integritätsring. Damit ist $V(I')$ als integres Schema, also als Varietät, nachgewiesen, denn die $D_+(x_k y_l)$ überdecken $\text{proj}(S)$.

Setzen wir $I'' = I' S^\circ$, so ist $V(I'') = \Phi^\circ$. Auf $D_+(x_k y_l)$ gilt

$$I''_{(x_k y_l)} = I'_{(x_k y_l)} S^\circ_{(x_k y_l)}$$

Da $I'_{(x_k y_l)}$ prim in $S_{(x_k y_l)}$ und $t \notin I'_{(x_k y_l)}$ ist $I''_{(x_k y_l)}$ prim in $S^\circ_{(x_k y_l)}$ und man hat

$$I''_{(x_k y_l)} \cap S_{(x_k y_l)} = I'_{(x_k y_l)}$$

Nun ist $\Phi^\circ \cap D_+(x_k y_l) = V(I''_{(x_k y_l)})$ ein integres Schema, da $I''_{(x_k y_l)}$ prim in $S^\circ_{(x_k y_l)}$. Also ist auch Φ° selbst eine Varietät, denn die $D_+(x_k y_l)$ überdecken $\text{proj}(S^\circ)$.

Das zu Φ° gehörige Ideal $I^\circ = I(\Phi^\circ) \subseteq S^\circ$ ist also ein Primideal und man hat $I^\circ \supseteq I''$ sowie

$$I_{(x_k y_l)}^\circ = I''_{(x_k y_l)}$$

denn $I''_{(x_k y_l)}$ ist das Primideal von $\Phi^\circ \cap D_+(x_k y_l)$ und das gleiche gilt von $I_{(x_k y_l)}^\circ$. Aus diesen Beziehungen können wir aber schon

$$I^\circ = I''$$

schließen. Wir nehmen dafür eine irredundante Primärzerlegung

$$I'' = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$$

und schließen aus $I_{(x_k y_l)}^\circ = I''_{(x_k y_l)}$, daß jedes Q_j mit $x_k y_l \notin Q_j$ gleich I° sein muß. Damit bleibt außer I° im Schnitt nur das irrelevante Ideal $(x_k y_l)_{kl} = S_+^\circ$, das aber wegen $S_+^\circ \supseteq I^\circ \supseteq I''$ vernachlässigt werden kann.

Wie oben erwähnt ist auch $V(I') \subseteq \text{proj}(S)$ eine irreduzible Varietät und damit $I = I(V(I'))$ ein Primideal in S . Weiterhin ist $I_{(x_k y_l)} = I'_{(x_k y_l)}$

Setzt man nun wieder eine irredundante Primärzerlegung an

$$I' = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$$

und betrachtet die Lokalisierungen $I'_{(x_k y_l)} = I_{(x_k y_l)}$, so kann man ebenso wie oben erschließen, daß jedes Q_j mit $x_k y_l \notin Q_j$ gleich I ist. Also ist, wie oben gefolgert, auch $I' = I$.

Für das Primideal $J = I(\Phi)$ gilt die Beziehung $I'' \cap S = J$. Es ist dann $J_{(x_k y_l)} = I'_{(x_k y_l)}$ und mit einer erneuten Betrachtung einer irredundanten Primärzerlegung

$$J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l$$

erschließt man $J = I'$. Die Varietät Φ hat also als Ideal $I(\Phi) = I' = I$.

4.1.9 Übungsaufgabe 2.32

Es sei

$$\Psi = \{(p, q, r) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid p, q, r \text{ kollinear in } \mathbb{P}^n\}$$

Bemerkung: Die Menge Ψ enthält alle Diagonalen.

- Zeige: Ψ ist eine abgeschlossene Untervarietät in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ von der Kodimension $n - 1$.
- Finde die Klasse

$$\psi = [\Psi] \in A^{n-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$$

mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Beweis. a) Legt man zwei Punkte $p, q \in \mathbb{P}^n$ beliebig fest, so liegen die möglichen $r \in \mathbb{P}^n$ mit p, q, r kollinear auf einer eindimensionalen Geraden durch p, q . Also ist die Dimension von Ψ gleich $n + n + 1 = 2n + 1$ und die Kodimension gleich $3n - (2n + 1) = n - 1$.

b) Mit $A((\mathbb{P}^n)^3) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta, \gamma]/(\alpha^{n+1}, \beta^{n+1}, \gamma^{n+1})$ ist

$$[\Psi] = \sum_{i+j+k=n-1} c_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

Es ist $c_{i,j,k} = \Psi \cap (E_i \times E_j \times E_k)$ mit allgemeinen linearen Teilräumen E_i, E_j, E_k der Dimensionen i, j, k . Man sucht also kollineare p, q, r mit $p \in E_i, q \in E_j$ und $r \in E_k$. Also mit r im Schnitt aller Geraden durch p, q mit E_r . Es seien $V_i, V_j, V_k \subseteq V$ die zugehörigen linearen Unterräume für $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ und $\dim V = n + 1$.

Es ist dann $\dim V_i = i + 1, \dim V_j = j + 1$ und $\dim V_k = k + 1$ und $i + 1 + j + 1 + k + 1 = n + 2$. Insbesondere ist $\dim(V_i + V_j) \leq n + 1$. Man kann also E_i und E_j so wählen, daß $V_i \cap V_j = (0)$ und $\dim(V_i + V_j) = i + 1 + j + 1$ ist. Der Vektorraum $V_i + V_j$ entspricht den Geraden durch $p \in E_i$ und $q \in E_j$. Der allgemeinste Schnitt mit E_k entspricht dem allgemeinsten Schnitt von $V_i + V_j$ mit V_k . Er hat also die Dimension $\dim(V_i + V_j) + \dim V_k - \dim V = i + 1 + j + 1 + k + 1 - (n + 1) = 1$ im affinen Urbild. Damit entspricht er also affin einem eindimensionalen Teilraum von V oder projektiv einem einzigen, genau bestimmten Punkt. Also ist $c_{i,j,k} = 1$ für alle $i + j + k = n - 1$.

4.1.10 Übungsaufgabe 2.33

Es seien (F_0, \dots, F_r) und (G_0, \dots, G_r) zwei allgemeine $(r + 1)$ -Tupel von homogenen Polynomen in $r + 1$ Veränderlichen mit den jeweiligen Graden d und e .

Sie definieren zwei reguläre Abbildungen $f : \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$ und $g : \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$ durch

$$f(x_0 : \dots : x_r) = (F_0(x) : \dots : F_r(x))$$

und

$$g(x_0 : \dots : x_r) = (G_0(x) : \dots : G_r(x)).$$

Für wieviele Punkte $x = (x_0 : \dots : x_r)$ ist $f(x) = g(x)$?

Beweis. Es sei $A(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^{r+1}, \beta^{r+1})$. Es ist dann

$$\Gamma_f = \sum_{i=0}^r d^i \alpha^i \beta^{r-i}$$

und

$$\Gamma_g = \sum_{j=0}^r e^j \alpha^j \beta^{r-j}$$

Der Schnitt ergibt

$$\Gamma_f \cdot \Gamma_g = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r d^i e^j \alpha^{i+j} \beta^{2r-(i+j)}$$

Ist $i + j < r$, so ist $2r - (i + j) > r$ und $\beta^{2r-(i+j)} = 0$. Ist $i + j > r$, so ist $\alpha^{i+j} = 0$. Also ist $i + j = r$ und man hat

$$\Gamma_f \cdot \Gamma_g = \sum_{i+j=r} d^i e^j \alpha^r \beta^r$$

Damit ist die Mächtigkeit von $\{x \in \mathbb{P}^r \mid f(x) = g(x)\}$ gleich

$$\deg(\Gamma_f \cdot \Gamma_g) = \sum_{i+j=r} d^i e^j$$

4.1.11 Übungsaufgabe 2.34

Betrachte den Ort $\Phi \subseteq (\mathbb{P}^2)^4$ von 4-Tupeln kollinear Punkte (p, q, r, s) in \mathbb{P}^2 .

Finde die Klasse $\varphi = [\Phi] \in A^2((\mathbb{P}^2)^4)$ mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Beweis Es sei $A((\mathbb{P}^2)^4) = \mathbb{Z}[a, b, c, d]/(a^3, b^3, c^3, d^3)$ und

$$\varphi = \sum_{i+j+k+l=2} c_{i,j,k,l} a^i b^j c^k d^l$$

Die Kodimension 2 ergibt sich aus der Tatsache, daß wir in Ψ zwei Punkte (z.B. p, q) beliebig festlegen und die zwei anderen (also r, s) auf der Gerade durch p, q wandern lassen können. Dies ergibt $2 + 2 + 1 + 1 = 6$ als Zahl der Freiheitsgrade.

Wieder ist $c_{i,j,k,l}$ die Mächtigkeit von $\Psi \cap (E_i \times E_j \times E_k \times E_l)$ mit generischen linearen Teilräumen $E_i, E_j, E_k, E_l \subseteq \mathbb{P}^2$ mit den Dimensionen i, j, k, l . Es genügt $c_{1,1,0,0}$ und $c_{2,0,0,0}$ zu bestimmen, die anderen ergeben sich aus der Symmetrie des Problems unter S_4 .

Seien also $E_i = E_1$ und $E_j = E'_1$ zwei generische Geraden und $E_k = E_0$ und $E_l = E'_0$ zwei generische Punkte. Man zieht die Gerade durch $r = E_0$ und $s = E'_0$. Ihre Schnitte mit E_1 bzw. E'_1 sind p bzw. q und damit eindeutig bestimmt. Es ist also $c_{1,1,0,0} = 1$.

Es bleibt $c_{2,0,0,0}$ zu bestimmen: $E_i = \mathbb{P}^2$ und $E_j, E_k, E_l = q, r, s$ drei generische Punkte. Durch diese geht aber im allgemeinen keine Gerade. Also ist $c_{2,0,0,0} = 0$.

Insgesamt hat man also

$$\varphi = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

4.1.12 Übungsaufgabe 2.35

Mit $\Phi \subseteq (\mathbb{P}^2)^4$ wie in der vorigen Übungsaufgabe bestimme die Klasse $\varphi = [\Phi]$ durch Anwendung des Ergebnisses von Übungsaufgabe 2.32 auf den Ort $\Psi \subseteq (\mathbb{P}^2)^3$ von Tripeln kollinear Punkte in \mathbb{P}^2 :

Betrachte im einzelnen den Schnitt der Orte $\Psi_{1,2,3}$ bzw. $\Psi_{1,2,4}$ von 4-Tupeln (p_1, p_2, p_2, p_4) mit (p_1, p_2, p_3) bzw. (p_1, p_2, p_4) kollinear.

Beweis. Wieder sei $A((\mathbb{P}^2)^4) = \mathbb{Z}[a, b, c, d]/(a^3, b^3, c^3, d^3)$. Es ist dann die Kodimension von $\Psi_{1,2,3}$ und $\Psi_{1,2,4}$ in $(\mathbb{P}^2)^3$ gleich $n - 1 = 2 - 1 = 1$. Man hat also nach Übungsaufgabe 2.32:

$$[\Psi_{1,2,3}] = a + b + c \tag{4.18}$$

$$[\Psi_{1,2,4}] = a + b + d \tag{4.19}$$

Das Produkt ist

$$[\Psi_{1,2,3}] \cdot [\Psi_{1,2,4}] = a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc + cd + ad + bd$$

Dieses Produkt enthält aber auch alle Punkte (p, p, r, s) , die in $\Psi_{1,2,3}$ und in $\Psi_{1,2,4}$, aber nicht notwendig in Ψ liegen. Ihre Klasse ist die Klasse der Diagonale δ in

$\mathbb{Z}[a, b]/(a^3, b^3)$, also gleich $a^2 + ab + b^2$. Zieht man diesen Ausdruck oben ab, so entsteht als Differenz wieder

$$\varphi = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

wie in der vorigen Übungsaufgabe.

4.1.13 Übungsaufgabe 2.36

Es seien A, B und $C : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ drei allgemeine Automorphismen von \mathbb{P}^2 . Für wieviele Punkte $p \in \mathbb{P}^2$ sind $p, A(p), B(p)$ und $C(p)$ kollinear?

Beweis. Es sei

$$\Gamma = \{(p, Ap, Bp, Cp) \in (\mathbb{P}^2)^4 \mid p \in \mathbb{P}^2\}$$

Offensichtlich ist $\dim \Gamma = 2$, also $\text{codim } \Gamma = 6$. Man hat also

$$\gamma = [\Gamma] = \sum_{i+j+k+l=6} c_{i,j,k,l} a^i b^j c^k d^l$$

Bis auf Symmetrien sind nur $c_{0,2,2,2}$ und $c_{1,1,2,2}$ zu bestimmen. Wie üblich geschieht das durch Schnitte mit linearen Teilräumen.

Zunächst ist natürlich $\Gamma \cap E_0 \times E_2 \times E_2' \times E_2''$ gleich (p, Ap, Bp, Cp) mit $p = E_0$, also $c_{0,2,2,2} = 1$.

Weiterhin ist $\Gamma \cap E_1 \times E_1' \times E_2 \times E_2'$ gleich der Menge aller Punkte p auf der Geraden E_1 , für die Ap auf der Geraden E_1' , also p auf der Geraden $A^{-1}E_1'$ liegt. Damit ist p der eindeutige Punkt auf dem Schnitt $E_1 \cap A^{-1}E_1'$ und auch $c_{1,1,2,2} = 1$.

Wir können also schreiben

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

mit

$$\gamma_1 = a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2$$

und

$$\gamma_2 = abc^2 d^2 + ab^2 cd^2 + ab^2 c^2 d + a^2 bcd^2 + a^2 bc^2 d + a^2 b^2 cd$$

Man erkennt leicht, daß für $\varphi = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ aus den vorigen Übungsaufgaben gilt $\varphi \cdot \gamma_1 = 0$ und $\varphi \cdot \gamma_2 = 6a^2 b^2 c^2 d^2$, indem in dem zweiten Ausdruck jeder Term von φ seinen eindeutigen Partner in γ_2 findet.

Es ist also die Anzahl der kollinearen p, Ap, Bp, Cp im allgemeinen gleich 6.

4.1.14 Aufblasung von \mathbb{P}^3 in einer Geraden $L \subseteq \mathbb{P}^3$

Es sei $L \subseteq \mathbb{P}^3$ eine Gerade und $\tilde{X} = \text{Bl}_L \mathbb{P}^3$ die Aufblasung von \mathbb{P}^3 bei L . Dann ist \tilde{X} der Abschluß Φ der Inzidenzvarietät

$$\Phi^\circ = \{(p, q) \in \mathbb{P}^3 \times L' \mid p \notin L, p \in (q, L)\}$$

wobei L' für eine zu L windschiefe Gerade und (q, L) für die von q und L aufgespannte Ebene steht.

Es sei $\alpha : \Phi \rightarrow L' = \mathbb{P}^1$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann ist α ein Ebenenbündel mit Faser isomorph zu \mathbb{P}^2 . Man wähle eine Ebene $W \subseteq \mathbb{P}^3$, die L nicht enthält und eine Gerade $G \subseteq W$. Nenne \tilde{W} die strikt-Transformierte von W , entsprechend ist $\tilde{G} = G$. Weiter sei $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma'_1 = L' = \mathbb{P}^1$ eine aufsteigende Folge linearer Teilräume mit $\dim \Gamma'_i = i$. Weiter sei $\Gamma_{i+2} = \alpha^{-1}(\Gamma'_i)$ mit $\dim \Gamma_i = i$.

Betrachte die 6 Teilmengen von \tilde{X} :

$$\Gamma_3 = \tilde{X} \tag{4.20}$$

$$\Gamma_3 \cap \tilde{W} = \tilde{W}, \Gamma_2 \tag{4.21}$$

$$\Gamma_3 \cap G = G, \Gamma_2 \cap \tilde{W} \tag{4.22}$$

$$\Gamma_2 \cap G = \text{pt.} \tag{4.23}$$

Sie sind die Abschlüsse einer affinen Zellenzerlegung von \tilde{X} in 6 affine Zellen und von oben nach unten von den Dimensionen 3, 2, 1, 0.

