ALGEBRAISCHE FLÄCHEN

Grundlagen

Definition 0.1. *Eine* algebraische Fläche X über einem Körper k *ist eine nichtsinguläre zweidimensionale projektive k-Varietät.*

Also ein reguläres, integres Schema vom endlichen Typ über k mit $\dim X = 2$ und einer sehr amplen Garbe $H = \mathcal{O}_X(1)$.

Theorem 0.1. *Für die Divisoren* $\operatorname{Div} X$ *gibt es eine symmetrische, bilineare Paarung*

$$\operatorname{Div} X \times \operatorname{Div} X \to \mathbb{Z},$$

die als $(C,D) \mapsto C.D$ *geschrieben wird und durch*

$$\operatorname{Cl} X \times \operatorname{Cl} X \to \mathbb{Z}$$

faktorisiert.

Beweis. Ein sehr ampler Divisor C induziert eine abgeschlossene Immersion $i_C : X \to \mathbb{P}^m$. Für die Hyperebenen $H \subseteq \mathbb{P}^m$ entsprechen den Hyperebenenschnitten $H \cap X$ bestimmte Schnitte des Linienbündels $\mathcal{O}_X(C)$ und diese wiederum bestimmten effektiven Divisoren $C' \sim C$ linear äquivalent zu C.
Nach dem Satz von Bertini entspricht also ein geeigneter dieser Schnitte einer nichtsingulären Kurve $C' = H' \cap X \sim C$. Gibt es schon zudem weitere nichtsinguläre Kurven $D_1, \dots, D_s \subseteq X$, so kann man zusätzlich $C' \pitchfork D_i$ erreichen.
Für C, D sehr ampel wählen wir also $C' \sim C$ und $D' \sim D$, nichtsingulär, mit $C' \pitchfork D'$ und setzen

$$C.D := \operatorname{len} \mathcal{O}_{C'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D'} = \#(C' \cap D').$$

Lemma 0.1. *Für C, D reguläre Kurven und $C \pitchfork D$ ist*

(1) $$\#(C \cap D) = \operatorname{len} \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D = \deg \mathcal{O}_C(D) = \deg \mathcal{O}_D(C)$$

Beweis. Man hat ja $0 \to \mathcal{O}_X(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$ und es ist exakt $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D$, denn die lokalen Ringe von $\mathcal{O}_D$ sind regulär und die Abbildung $\mathcal{O}_D(-C) \to \mathcal{O}_D$ wird für einen lokalen Ring A durch $0 \to A \xrightarrow{\cdot g} A$ vermittelt.
Also

$$0 \to \mathcal{O}_D(-C) \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D \to 0$$

Daraus liest man sofort ab $\deg \mathcal{O}_D(C) = \operatorname{len}(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D) = \#(C \cap D)$. ☐
Sind also zwei reguläre Kurven $(C \sim C') \pitchfork D$ so ist $C.D = C'.D$. Solche C, C' können zwei reguläre Hyperebenenschnitte zu $\mathcal{O}_X(C)$ sein.

Lemma 0.2. *Ist $C' \pitchfork D'$ und $C'' \pitchfork D''$ und D', D'', C', C'' reguläre Kurven, wobei C', C'' aus Hyperebenenschnitten der Einbettung $\mathcal{O}_X(C)$ stammen und entsprechend D', D'' aus Hyperebenenschnitten der Einbettung $\mathcal{O}_X(D)$, so ist $C'.D' = C''.D''$ und damit $C.D$ wohldefiniert.*

Beweis. Wir wählen ein D''' regulär aus $\mathcal{O}_X(D)$ mit $D''' \pitchfork C', C''$.
Haben wir zur Definition einmal C', D' und einmal C'', D'' herangezogen, so ist nach dem vorigen Lemma 0.1

$$C'.D' = C'.D''' = C''.D''' = C''.D''.$$

Also ist die Festsetzung unabhängig von der Wahl der C', D'. Nach Konstruktion ist auch $C.D = D.C$. ☐
Wir müssen noch

$$(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$$

zeigen. Es sei $C_1' \sim C_1$ und $C_2' \sim C_2$ sowie $C_{12}' \sim C_1 + C_2$, alle nichtsinguläre Kurven, sowie $D' \sim D$ mit $D' \pitchfork C_1', C_2', C_{12}'$ und $D' \cap C_1' \cap C_2' = \emptyset$.
Dann ist

(2) $$(C_1 + C_2).D = \deg \mathcal{O}_{D'}(C_{12}') = \deg \mathcal{O}_{D'}(C_1' + C_2') = \\ = \deg \mathcal{O}_{D'}(C_1') + \deg \mathcal{O}_{D'}(C_2') = (C_1.D) + (C_2.D)$$

Für einen Divisor C ist $C + mH$ von globalen Schnitten erzeugt und $C + (m+1)H$ sehr ampel. Wir können also jedes C als Differenz $C = C_1 - C_2$ von sehr amplen Divisoren schreiben. Ist D sehr ampel, definieren wir

(3) $$C.D := C_1.D - C_2.D$$

Ist $C = C_1 - C_2 = C_3 - C_4$ so ist $C_1 + C_4 = C_3 + C_2$ und $C_1.D + C_4.D = (C_1 + C_4).D = (C_3 + C_2).D = C_3.D + C_2.D$. Also ist (3) wohldefiniert.

Proposition 0.1. *Es sei $C \subseteq X$ eine reguläre Kurve und D ein beliebiger Divisor. Dann ist $C.D = \deg \mathcal{O}_C(D)$.*

Beweis. Wir können D sehr ampel annehmen und $C = C_1 - C_2$ mit C_i, sehr ampel, $C_i' \sim C_i$, regulär und $D' \sim D$ mit $D' \pitchfork C_1', C_2', C$ und regulär. Es ist dann $C.D = (C_1 - C_2).D = C_1.D' - C_2.D' = C_1'.D' - C_2'.D' = \deg \mathcal{O}_{D'}(C_1') - \deg \mathcal{O}_{D'}(C_2') = \deg \mathcal{O}_{D'}(C_1 - C_2) = \deg \mathcal{O}_{D'}(C) = \deg \mathcal{O}_C(D') = \deg \mathcal{O}_C(D)$.

Proposition 0.2. *Es sei C ein sehr ampler Divisor und $D = (f)$ ein Hauptdivisor. Dann ist $C.D = C.(f) = 0$.*

Beweis. Es ist $C.D = C'.D = \deg \mathcal{O}_{C'}((\bar{f})) = 0$. Dabei ist C' eine reguläre Kurve mit $C' \sim C$. ☐

Proposition 0.3. *Es sei $C \subseteq X$ eine reguläre Kurve auf X, gegeben durch $\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_X(-C)$.*
Dann ist mit der Normalengarbe $\mathcal{N}_C = (\mathcal{I}_C / \mathcal{I}_C^2)^\vee$ immer

(4) $$C.C = \deg_C \mathcal{N}_C.$$

Proposition 0.4. *Es sei C eine reguläre Kurve vom Geschlecht g auf X und $K = K_X$ der kanonische Divisor. Dann ist*

(5) $$2g - 2 = C.(C + K)$$

Bemerkung 0.1. *Für einen Divisor D auf X nennen wir $s(D) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ die* Superabundanz von D *und $l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.*

Theorem 0.2 (Riemann-Roch)**.** *Für einen Divisor D auf X gilt*

(6) $$l(D) - s(D) + l(K - D) = \frac{1}{2} D.(D - K) + 1 + p_a$$

mit $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + p_a$.

Jürgen Böhm, Wertheim, 28. Dezember 2025